Exames de Certificação – MATEMÁTICA – Ensino Médio

EJA
Educação de Jovens e Adultos

NÚCLEO DE EXAMES DE CERTIFICAÇÃO

MATERIAL DE ESTUDO

MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO

2019

MATEMÁTICA

SUMÁRIO

O cálculo nas atividades cotidianas – Adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais 4

Números quebrados – As frações 32

Operações com números reais 54

Números quebrados – Os decimais 60

Proporcionalidade 71

Hora do resumo: razão, proporção, regra de três e porcentagens 103

Porcentagens 106

Divisão em partes proporcionais 124

Equações e resolução de problemas 127

Equações de 1º e 2º graus 141

Funções 144

Função quadrática 152

Matrizes 166

Combinatória 198

Probabilidade 211

A Matemática na comunicação 224

Relações em triângulos: Teorema de Pitágoras 251

Geometria Analítica 257

Progressões aritméticas e geométricas 285

Conversão de unidades 308

Referências bibliográficas 318

O CÁLCULO NAS ATIVIDADES COTIDIANAS

TEMAS

1. As modalidades de cálculo na escola, em casa e no trabalho
2. Multiplicação e divisão: métodos e estratégias
3. Divisões, adições e subtrações nas compras com desconto ou a prazo

Introdução

No dia a dia, você é desafiado a operar com quantidades quase o tempo todo. Este é o tema desta Unidade: o cálculo e as diversas formas de calcular que são usados habitualmente.

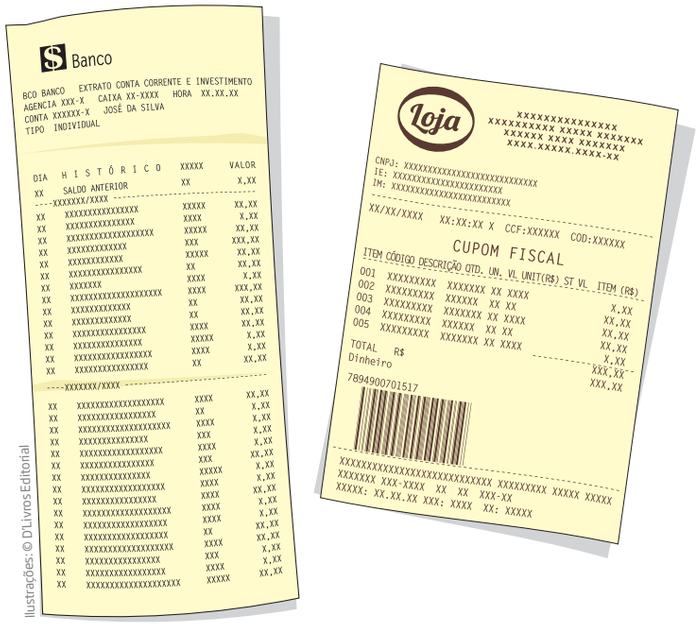
Para ampliar sua autonomia em relação ao raciocínio matemático, você irá realizar atividades que vão ajudá-lo a perceber as propriedades das operações e os procedimentos de cálculo.

As modalidades de cálculo na escola, em casa e no trabalho

TEMA 1

O cálculo faz parte da vida das pessoas; assim, seria muito difícil viver no mundo atual sem ter de fazer contas.

Neste momento, você terá a oportunidade de perceber que os procedimentos de cálculo são justificados por propriedades das operações, pelas regras do sistema de numeração decimal e por questões práticas.



Ilustrações: © D'Livros Editorial

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Reflita um pouco sobre o que você tem feito nos últimos tempos.

- Alguma de suas atividades cotidianas ou profissionais envolve a realização de cálculos?
- Qual foi a última vez que precisou fazer uma conta?
- Em que situações é necessário efetuar cálculos?
- Você consegue imaginar alguma profissão em que o cálculo é desnecessário?

Modalidades de cálculo



O cálculo está presente em praticamente todas as atividades profissionais: do pedreiro, do marceneiro, do engenheiro, do bancário, do contador, do economista, entre outras. Todos fazem cálculos, de um modo ou de outro.

As atividades que exigem rapidez e precisão na realização de cálculos utilizam ferramentas como calculadoras e *softwares* (programas de computador).



Entretanto, na maior parte das situações do cotidiano, os cálculos não precisam ser exatos. Quando você vai à feira, se já sabe o que pretende comprar, não é necessário levar o dinheiro contado, até mesmo porque os preços podem ter variado. Contudo, é importante ter uma noção do que vai gastar, e, para isso, basta saber o valor aproximado. É assim também em outras atividades. O alfaiate, por exemplo, tem uma ideia aproximada de quantos metros de tecido vai precisar para confeccionar uma roupa – ele sabe que haverá retalhos e que existem casos em que remendos não poderão ser feitos.



Na vida prática, na maioria das vezes, os cálculos são efetuados de quatro modos diferentes:

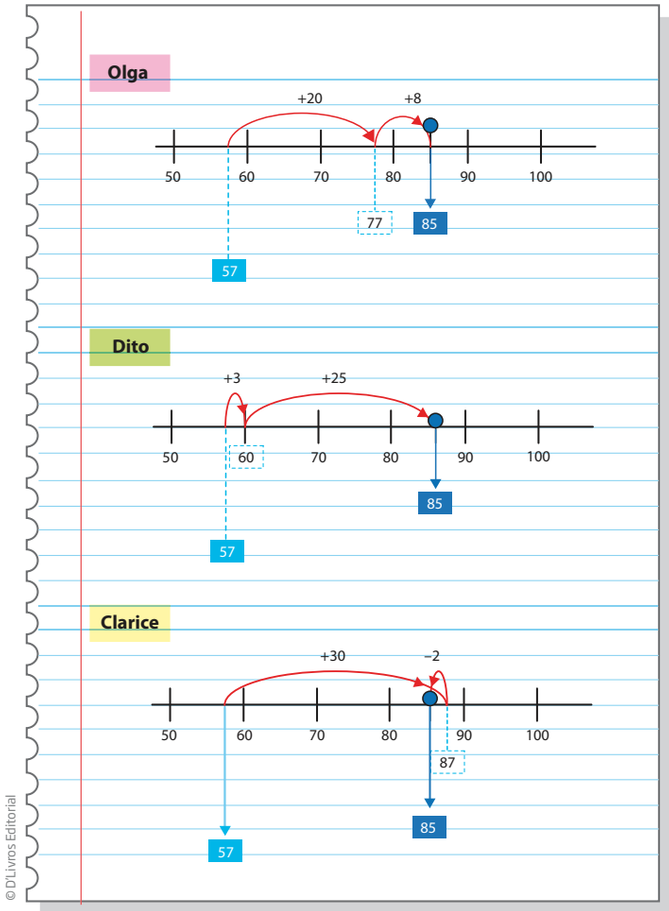
- cálculo mental;
- cálculo escrito no papel;
- por estimativa;
- na calculadora ou no computador.

Ilustrações: © D'Livros Editorial

A seguir, você vai explorar alguns procedimentos de cálculo mental e aprofundar seu conhecimento sobre o cálculo escrito, buscando compreender o porquê de cada uma de suas etapas.

ATIVIDADE 1 Cálculos

Muitas vezes não se percebe como a Matemática está presente no cotidiano das pessoas. Nesta atividade, você vai realizar cálculos mentais para perceber esse fato.



© D'Livros Editorial

1 Relacione cada forma de raciocínio dos balões às estratégias de cálculo de cada pessoa:

Cálculo:
57 + 28
85 – 57
85 – 28

Somo **57 + 20 = 77**, uma adição simples de se fazer mentalmente.

_____

77 está próximo de **85** e ainda faltam **8**.

_____

Portanto, somei **3 + 25 = 28**. Logo, posso concluir que **85 – 57 = 28**.

_____

Somei no total **20 + 8 = 28**. Logo, **57 + 28 = 85**.

_____

30 – 2 = 28. Logo, **57 + 28 = 85** e ainda **85 – 28 = 57**.

_____

Procuro fazer contas que dão resultados redondos, por exemplo, **57 + 3 = 60**.

_____

Para calcular **85 – 57**, procuro responder a pergunta **"Quanto deve ser acrescentado a 57 para completar 85?"**.

_____

Evito adições com reagrupamento, prefiro somar números a dezenas exatas, como **60 + 25 = 85**.

_____

O que fiz: **57 + 30 – 2 = = (57 + 30) – 2 = 87 – 2 = 85**.

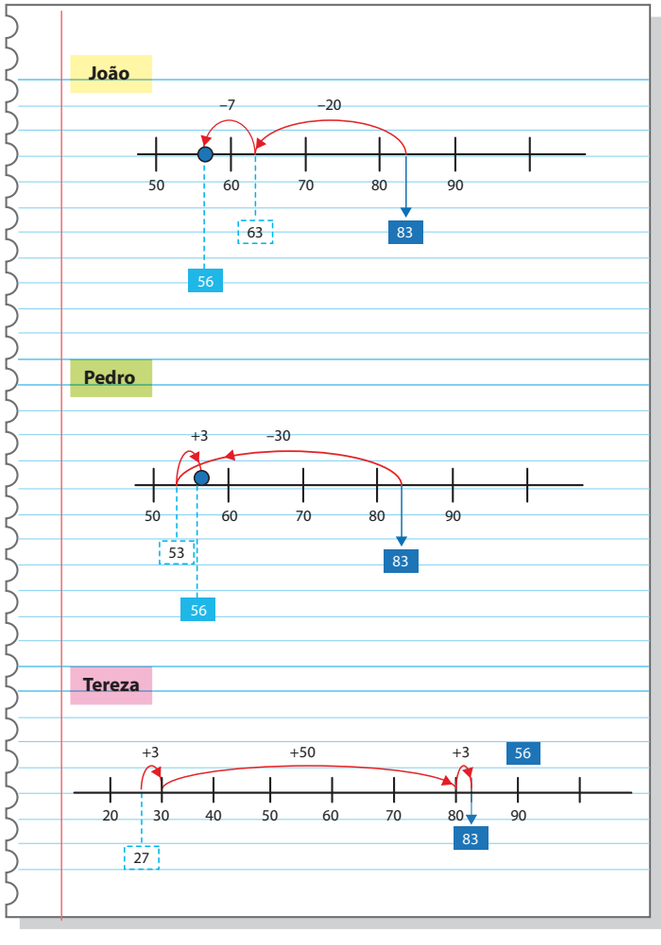
_____

2 Escolha um dos procedimentos utilizados nos esquemas e calcule:

a) 315 – 248 =

b) 237 + 175 =

3 Observe os esquemas de cálculo e explique como cada um raciocinou para encontrar o resultado.



Cálculo:
83 – 27
83 – 56
27 + 56

© D'Livros Editorial

ORIENTAÇÃO DE ESTUDO

Leia os enunciados dos problemas mais de uma vez para compreender o que está sendo solicitado. Nem sempre se compreende tudo na primeira leitura. Durante a resolução, observe o que deve ser feito e, se desejar, faça anotações dos dados principais para auxiliar na organização de seu pensamento e no registro de sua solução.

ATIVIDADE 2 Pratique resolvendo problemas

1 Seu Marcos foi fazer uma entrega em outra cidade, que fica no quilômetro 173 de certa estrada. No caminho, ele passou pela marca dos 95 km. Naquele momento, quantos quilômetros faltavam para ele chegar a seu destino?

2 Seu Manuel tinha no caixa R$ 517,00 e pagou R$ 242,00 para um fornecedor de mercadorias. Quanto ele tem no caixa agora?

ATIVIDADE 3 Problemas de troco

1 Uma pessoa comprou uma mercadoria de R$ 34,00 e pagou com uma nota de R$ 100,00. Quanto ela deve ter recebido de troco?

2 Em outra loja, essa mesma pessoa comprou uma mercadoria que custava R$ 27,00, pagando com uma nota de R$ 50,00. Quanto ela recebeu de troco?

3 Se um comprador tinha R$ 100,00 na carteira e comprou duas mercadorias, uma de R$ 34,00 e outra de R$ 27,00, quantos reais ainda lhe restam?

ATIVIDADE 4 Ajudando no troco

1 Ao comprar uma mercadoria de R$ 72,00, o cliente deu uma nota de R$ 100,00. Como o vendedor não tinha dinheiro trocado, ele pediu ao comprador que facilitasse o troco dando mais R$ 2,00. Agora, quanto o vendedor deve devolver de troco para o cliente?

DESAFIO

1 Em uma padaria, uma coxinha custa R$ 1,80, e um pão de queijo, R$ 1,20. Se Marcos comeu 2 coxinhas e Paulo comeu um pão de queijo, qual foi o total que eles gastaram?

a) R$ 4,20 **b)** R$ 4,40 **c)** R$ 4,60 **d)** R$ 4,80

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/6%C2%AA%20s%C3%A9rie%20EF/1_Manh%C3%A3/Prova-MAT-6EF-Manha.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2014.

2 Marisa gastou R$ 164,00 para comprar seu uniforme. Sabendo que ela gastou R$ 96,00 para comprar 3 calças e que o restante foi utilizado para a compra de 4 camisas idênticas, pode-se dizer que cada camisa custou:

a) R$ 17,00 **b)** R$ 24,00 **c)** R$ 32,00 **d)** R$ 68,00

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/6%C2%AA%20s%C3%A9rie%20EF/2_Tarde/Prova-MAT-6EF-Tarde.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Cálculos

1 *Olga*: Para calcular 85 – 57, procuro responder à pergunta "Quanto deve ser acrescentado a 57 para completar 85?". "Somo 57 + 20 = 77, uma adição simples de se fazer mentalmente", "77 está próximo de 85 e ainda faltam 8", "Somei no total 20 + 8 = 28. Logo, 57 + 28 = 85".

Dito: "Procuro fazer contas que dão resultados redondos, por exemplo, 57+ 3 = 60", "Evito adições com reagrupamento, prefiro somar números a dezenas exatas, como 60 + 25 = 85", "Portanto, somei 3 + 25 = 28. Logo, posso concluir que 85 – 57 = 28".

Clarice: "O que fiz: 57 + 30 – 2 = (57 + 30) – 2 = 87 – 2 = 85", "30 – 2 = 28. Logo, 57 + 28 = 85 e ainda 85 – 28 = 57".

2 Essa questão pode ser resolvida da forma que preferir. As respostas apresentadas aqui são apenas algumas soluções possíveis:

a) Possível solução: 248 + 2 + 50 + 15 = 315; 248 + (2 + 50 + 15) = 248 + 67 = 315, portanto, 315 – 248 = 67.

b) 175 + 200 + 30 + 7 = 375 + 30 + 7 = 405 + 7 = 412.

3 *João*: "83 – 20 = 63", "63 – 7 = 56", "20 + 7 = 27". "Então, 83 – 27 = 56".

Pedro: "83 – 30 = 53", "53 + 3 = 56", "30 – 3 = 27". "Então, 83 – 56 = 27".

Tereza: "27 + 3 = 30", "30 + 50 = 80", "80 + 3 = 83", "3 + 50 + 3 = 56". "Então, 27 + 56 = 83".

Atividade 2 - Pratique resolvendo problemas

1 Possível estratégia de cálculo: de 95 para 100 são 5; de 100 para 170, são 70; de 170 para 173, são 3. Total: 5 + 70 + 3 = 78. Assim, naquele momento faltavam 78 km para seu Marcos chegar a seu destino.

2 Possível estratégia de cálculo: de 242 para 250 são 8; de 250 para 300 são 50; de 300 para 517 são 217. Total: 8 + 50 + 217 = 275. Logo, agora ele tem no caixa R$ 275,00.

Atividade 3 - Problemas de troco

Nessa atividade, você trabalha as operações de cálculo existentes nas situações que envolvem troco, exercitando as diferentes estratégias possíveis para encontrar o resultado.

Veja que, apesar de ser possível resolver problemas de troco pela subtração, eles também podem ser solucionados com adições, usando a ideia de completar.

1 100 – 34 = 66. Ela deve ter recebido de troco R$ 66,00.

Contudo, o mesmo problema pode ser resolvido pelo procedimento de completar, respondendo à pergunta "Quanto devo somar a 34 para chegar a 100?". Muitos comerciantes resolvem o problema de troco desse modo: "de 34 para 40 são 6 reais; de 40 para 50 são 10 reais, de 50 para 100 são 50 reais", portanto, 6 + 10 + 50 = 66.

2 50 – 27 = 23. Ela recebeu R$ 23,00 de troco.

Ou: de 27 para 30 são 3, e de 30 para 50 são 20. Logo, 3 + 20 = 23.

3 Gastou 34 + 27 = 61. Como ela tinha R$ 100,00 ficou com 100 – (34 + 27) = 100 – 61 = 39. Então, ainda lhe restam R$ 39,00.

O mesmo problema pode ser resolvido por partes: 100 – 34 = 66; 66 – 27 = 39.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 4 - Ajudando no troco

1 O objetivo dessa atividade é o mesmo da anterior, porém numa situação em que se solicita que o comprador facilite o troco. Essa é uma situação muito comum. Em geral, ela acontece quando os comerciantes não têm notas pequenas nem moedas no caixa, mas apenas notas de valores maiores, como de R$ 10,00, R$ 20,00 ou R$ 50,00.

O comprador deu para o vendedor 100 + 2 = 102 para subtrair de 72. Portanto, o vendedor deve devolver 102 – 72 = 30.

(100 + 2) – 72 = (100 – 72) + 2 = 28 + 2 = 30.

O vendedor deve devolver para o cliente R$ 30,00.

Conforme você percebeu, esse mecanismo facilita o troco: ao acrescentar R$ 2,00, o cliente paga esse valor "à parte", ficando então a ser cobrado apenas os R$ 70,00, que é uma dezena exata.

Desafio

1 Alternativa correta: **d**. Para saber quanto eles gastaram, pode-se pensar em 1,80 + 1,80 + 1,20. Sabe-se que 80 centavos mais 20 centavos formam 1 real, então 1,80 + 1,20 = 3,00 e 3,00 + 1,80 = 4,80. Portanto, eles gastaram R$ 4,80.

2 Alternativa correta: **a**. 164 – 96 = 68. Logo, R$ 68,00 é o valor que gastou nas camisas. Como eram 4 camisas idênticas: 68 ÷ 4 = 17. Cada camisa custou R$ 17,00.



Registro de dúvidas e comentários

O objetivo de estudo deste tema é rever a multiplicação e a divisão, porém não da forma convencional, ou seja, aquela que você está habituado a realizar, mas sim de modo mais intuitivo, fazendo uso do raciocínio lógico e do cálculo mental.

Os **algoritmos** dessas operações são apresentados por meio de esquemas e situações-problema, buscando o entendimento do que é feito em cada uma das operações, que, assim, deixam de ser uma repetição mecânica e sem sentido.

Algoritmo



© J Marshall - Tribaleye Images/Alamy/Glow Images

Palavra derivada do nome Al Khowarizmi, que foi um matemático árabe do século IX. Um algoritmo é uma espécie de receita que descreve como executar certa tarefa. Daí chamar de algoritmo da divisão a sequência de etapas que se deve executar para dividir um número pelo outro.

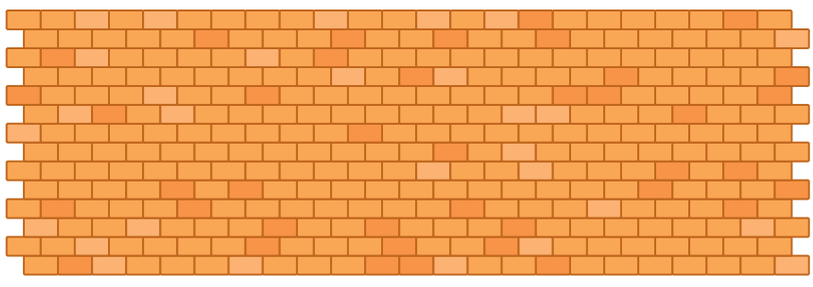
O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Mesmo não sendo um profissional da construção civil, você já deve ter se deparado com uma situação prática desse setor, como o cálculo dos tijolos necessários para levantar uma parede ou o de lajotas requeridas para cobrir o piso de um cômodo.

Você já percebeu que existem diversos procedimentos para realizar esse tipo de cálculo? Pois é, isso ocorre porque é possível se chegar à solução usando o raciocínio lógico, que, muitas vezes, difere de pessoa para pessoa. Assim, a forma como você calcularia o número de lajotas citado anteriormente pode ser diferente do modo que outra pessoa faria isso, mas, provavelmente, os dois chegariam ao mesmo número se utilizassem estratégias corretas.

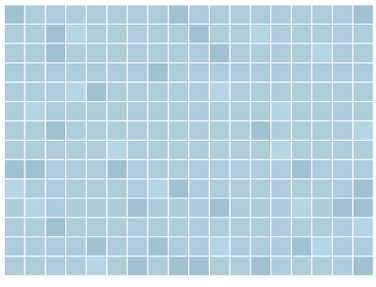
Procedimentos de multiplicação

Seu Raimundo trabalha na construção civil. Ele faz muitas coisas para colocar uma casa em pé. Por exemplo, na etapa de construção, assenta tijolos para construir uma parede e, na etapa de acabamento, coloca ladrilhos e lajotas.



© D'Livros Editorial

Nesta parede são colocados 23 tijolos no comprimento e 14 tijolos na altura.



© D'Livros Editorial

No piso desta sala cabem 18 lajotas no comprimento e 14 lajotas na largura.

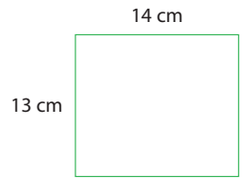
• Como poderia ser feito o cálculo para saber quantos tijolos e lajotas seu Raimundo precisa para erguer a parede e forrar o piso?

A multiplicação é uma das operações mais utilizadas na construção civil. Pedreiros e mestres de obra usam a multiplicação para calcular o número de tijolos, lajotas ou ladrilhos que usam nas construções.

Há várias maneiras de multiplicar. A forma mais comum, rápida e simples é usar uma calculadora. Mas, mesmo usando-a, é importante saber o que se está fazendo para poder realizar melhor a operação. É por isso que você vai se aprofundar nas várias maneiras de fazer uma multiplicação, mas compreendendo o processo realizado.

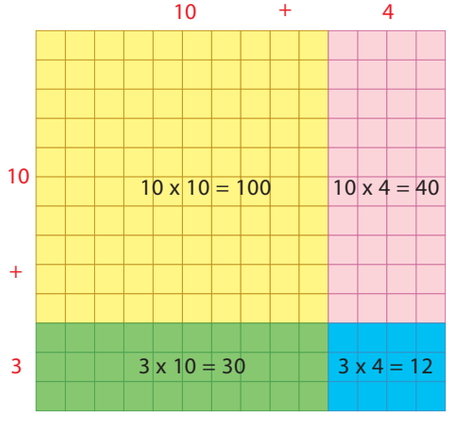
O papel quadriculado é um bom recurso para ajudar a entender as etapas da multiplicação.

Como você pôde ver nas atividades realizadas pelo pedreiro, são comuns situações que envolvem o cálculo da área de um retângulo como o que segue ao lado.

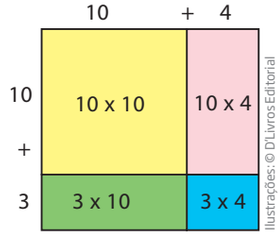


• qual é a área desse retângulo?

Veja as etapas apresentadas a seguir e aprenda a calcular a área de uma figura geométrica usando o papel quadriculado.



(10 + 3)
x (10 + 4)
12
40
30
100
182



Ilustrações: © D'Livros Editorial

13 x 14 = (10 + 3) x (10 + 4) = 100 + 30 + 40 + 12 = 182

Acompanhe, agora, algumas estratégias que mostram as etapas que você pode utilizar para calcular, por exemplo, a multiplicação 146 × 3.

C D U

1 4 6
x 3

→

C D U

1C + 4D + 6U
x 3

3C + 12D + 18U

→

C D U

100 + 40 + 6
x 3

300 + 120 + 18

→

C D U

1 4 6
x 3
1 8
1 2 0
3 0 0
4 3 8

→

C D U

1 4 6
x 3
4 3 8

ATIVIDADE 1 Células "vazias"

1 Pratique a multiplicação completando os espaços vazios.

a)

C		D		U
200	+	50	+	7
			x	6
☐	+	☐	+	☐	=

b)

	C	D	U
	4	2	3
		x	5
		☐	☐
+	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐

c)

C		D		U		
☐	+	☐	+	☐		
			x	☐		
2.100	+	350	+	56	=	?

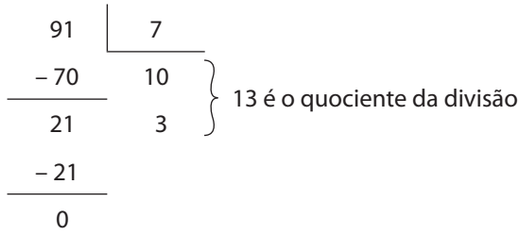
2 Seu Manuel estava fazendo uma multiplicação quando algumas gotas de tinta borraram certos números da conta. Descubra que números foram cobertos pelas gotas de tinta.

	C	D	U
	4	3	●
		x	6
		●	8
+	1	8	0
●	●	●	0
2	6	2	8

A divisão

Há muitas maneiras de fazer uma divisão. Quando a conta é muito simples, pode-se realizá-la mentalmente ou no papel. Por exemplo, se você sabe a tabuada do 7 de cabeça, pode resolver a divisão de 42 por 7 facilmente: 42 ÷ 7 = 6, em que 6 é o quociente da divisão.

Também pode-se usar o papel para resolver a divisão 91 ÷ 7:



No entanto, nas atividades do dia a dia (e do mundo do trabalho), como já foi dito no caso da multiplicação, é mais simples e rápido usar a calculadora. Mas, mesmo ao usar uma calculadora, é importante entender a divisão que é feita para se evitar erros, seja na hora de digitar os números, seja na leitura e interpretação do resultado.

Você lembra como se faz uma divisão sem o auxílio de uma calculadora?

Por exemplo, determine o quociente e o resto da divisão de 885 por 7 usando lápis e papel. Para compreender melhor as etapas de como fazer uma divisão com lápis e papel, veja a descrição da solução do problema a seguir.

Distribuindo a gorjeta

Depois de um fim de semana de muito movimento, 7 garçons fizeram a divisão, em partes iguais, da gorjeta arrecadada em três dias de trabalho. Para tanto, eles adotaram as etapas a seguir:

- primeiro, contaram todo o dinheiro, que somou **R$ 885,00**;
- em seguida, distribuíram **R$ 100,00** para cada um: 7 × 100 = 700;
- calcularam, então, quanto restava distribuir: 885 – 700 = 185;
- dessa vez, distribuíram **R$ 20,00** para cada um: 7 × 20 = 140;
- calcularam novamente quanto havia sobrado: 185 – 140 = 45;
- depois, distribuíram **R$ 5,00** para cada: 7 × 5 = 35;
- viram que, mais uma vez, restou dinheiro a ser dividido: 45 – 35 = 10;
- ainda foi possível entregar mais **R$ 1,00** para cada um: 10 – 7 = 3;

- Assim, cada um ficou com: R$ 100,00 + R$ 20,00 + R$ 5,00 + R$ 1,00 = **R$ 126,00**;
- Os R$ 3,00 que restaram ficaram para a caixinha do fim de semana seguinte.

Veja como fica essa divisão da caixinha no dispositivo conhecido como "divisão na chave":

Dividendo →	**885**	**7**	← Divisor
	– 700	100	
	185	20	
	– 140		
Subtrações sucessivas	45	5	
	– 35		
	10	1	O quociente é: 100 + 20 + 5 + 1 = **126**
	– 7		
Resto →	3		

Lembre-se de que o **dividendo (D)** é a quantidade que tem de ser dividida pelo **divisor (d)**, e o resultado é o **quociente (q)**. Se o **resto (r)** é zero, diz-se que a **divisão** é **exata**, e o dividendo é múltiplo do divisor.

$D = d \times q + r$

$r < d$

$D \div d = q$, se $r = 0$

O resto sempre deve ser menor que o divisor.

IMPORTANTE!

Os símbolos > e < são a notação usada para expressar desigualdades, como: **a** > **b** significa que **a** é maior do que **b**; **b** < **a** significa que **b** é menor do que **a**.

VOCÊ SABIA?

Ao usar uma calculadora, para saber se uma divisão é exata no conjunto dos números inteiros, o número que aparece no visor tem que ser um número inteiro, não podendo, portanto, apresentar vírgula. Por exemplo, ao teclar 842 ÷ 4, aparece o número 210,5; isso quer dizer que o resultado inteiro é 210 e sobra um resto. Para saber de quanto é o resto, calcule: 210 × 4 = 840. Logo, o resto é 2.

ATIVIDADE 2 Exercitando a operação de divisão

1 Quais das contas a seguir são divisões exatas no conjunto dos números inteiros?

a) 287 ÷ 7 =

b) 348 ÷ 2 =

c) 542 ÷ 4 =

d) 135 ÷ 5 =

e) 299 ÷ 9 =

f) 369 ÷ 3 =

g) 369 ÷ 6 =

h) 369 ÷ 9 =

i) 248 ÷ 4 =

j) 248 ÷ 8 =

k) 842 ÷ 4 =

l) 842 ÷ 8 =

2 Quatro primos resolveram se associar em um pequeno negócio. Juntaram suas economias e deram certa quantia de entrada na compra de um carrinho de cachorro-quente (a ideia era vender cachorros-quentes nos finais de semana). O restante seria pago em prestações. Eles combinaram que cada um trabalharia em um fim de semana. Ao final de um mês, fizeram as contas:

Gastos	Valores em reais (R$)
Prestação do carrinho	120,00
Pão	145,00
Salsicha	157,00
Mostarda	23,00
Molho de tomate	18,00
Gás	35,00

Nos quatro fins de semana do mês, eles arrecadaram um total de R$ 1.346,00 com a venda dos lanches. Então, descontaram o que foi gasto e dividiram o lucro. Determine quanto cada sócio recebeu de lucro na partilha.

ATIVIDADE 3 Multiplicando e dividindo mentalmente

1 Use a calculadora e divida:

20 ÷ 10 = _____	200 ÷ 100 = _____	2.000 ÷ 1.000 = _____
30 ÷ 10 = _____	300 ÷ 100 = _____	3.000 ÷ 1.000 = _____
50 ÷ 10 = _____	500 ÷ 100 = _____	5.000 ÷ 1.000 = _____
70 ÷ 10 = _____	700 ÷ 100 = _____	7.000 ÷ 1.000 = _____
80 ÷ 10 = _____	800 ÷ 100 = _____	8.000 ÷ 1.000 = _____
120 ÷ 10 = _____	1.200 ÷ 100 = _____	12.000 ÷ 1.000 = _____
200 ÷ 10 = _____	2.000 ÷ 100 = _____	20.000 ÷ 1.000 = _____
450 ÷ 10 = _____	4.500 ÷ 100 = _____	45.000 ÷ 1.000 = _____
540 ÷ 10 = _____	5.400 ÷ 100 = _____	54.000 ÷ 1.000 = _____
2.000 ÷ 10 = _____	7.500 ÷ 100 = _____	75.000 ÷ 1.000 = _____
3.100 ÷ 10 = _____	21.000 ÷ 100 = _____	125.000 ÷ 1.000 = _____
6.780 ÷ 10 = _____	99.900 ÷ 100 = _____	213.000 ÷ 1.000 = _____

2 O que você descobriu?

_____

_____

3 Agora, descreva como você pode fazer mentalmente uma divisão por 10, por 100 e por 1.000.

_____

_____

POTÊNCIAS DE 10

Os números 10, 100, 1.000, 10.000, e assim sucessivamente, são chamados potências de 10. Elas são obtidas pelas seguintes multiplicações:

100 = 10 × 10

1.000 = 10 × 10 × 10

10.000 = 10 × 10 × 10 × 10

100.000 = 10 × 10 × 10 × 10 × 10

1.000.000 = 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10

...

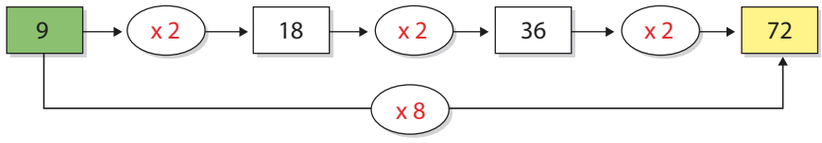
Saber isso facilita na realização do cálculo mental da multiplicação e da divisão. Para multiplicar ou dividir por 1.000, por exemplo, é só multiplicar ou dividir por 10 três vezes seguidas.

A multiplicação e a divisão por meio de estratégias

Multiplicando por 4 e por 8

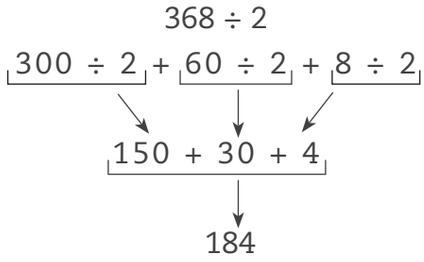
Lembre-se de que: 4 = 2 × 2 e 8 = 2 × 2 × 2.

Agora, acompanhe o esquema:



Dividindo por 2, por 4 e por 8

Dividir por 2 não é muito complicado; pode-se fazê-lo decompondo mentalmente o dividendo. Veja os exemplos:

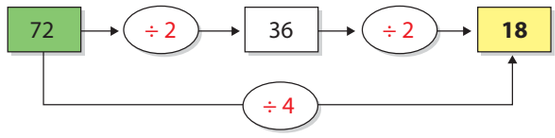


846 ÷ 2 = 800 ÷ 2 + 40 ÷ 2 + 6 ÷ 2 = 400 + 20 + 3 = 423

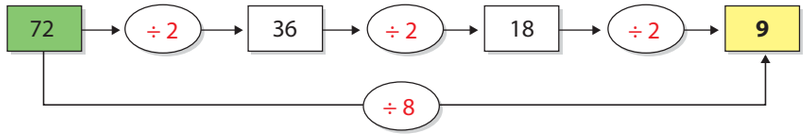
974 ÷ 2 = 450 + 35 + 2 = 487

Para dividir por 4, basta lembrar que 4 = 2 × 2. Sendo assim, é só calcular a metade da metade do número que se quer dividir por 4.

Acompanhe o esquema:

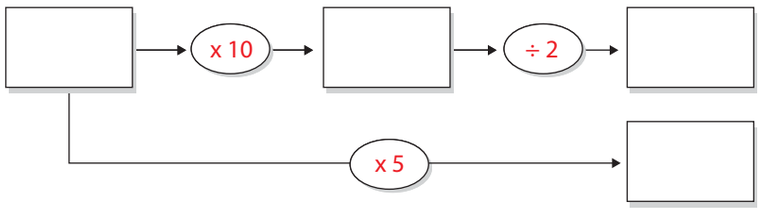


Para dividir por 8, o procedimento é semelhante, basta lembrar que 8 = 2 × 2 × 2.



ATIVIDADE 4 Multiplicando por 5 mentalmente

1 Pense em um número inteiro de dois dígitos, multiplique-o mentalmente por 10 e, depois, divida o resultado por 2. Agora, multiplique o número em que você havia pensado por 5. O que você descobriu a respeito dos resultados dos dois procedimentos?



2 Repita o procedimento com outros números. O que você concluiu?

3 Você acha que essa regra funciona sempre? Justifique.



© Iugris/Alamy/Glow Images

O pensador, de Auguste Rodin.

VOCÊ SABIA?

Auguste Rodin (1840-1917) foi um grande escultor francês. Ele fez parte do período estético chamado de Simbolismo, que se consolidou na França, no ano de 1886. Esse movimento teve como objetivo expressar os sentimentos individuais pela arte. A escultura *O pensador* é feita de bronze, um material bastante utilizado por esse artista, e tem duas versões. A primeira foi concluída em 1880, e a outra, em tamanho maior, foi finalizada em 1902 e encontra-se, hoje, no Museu Rodin, em Paris, na França.

ATIVIDADE 5 Exercitando a multiplicação e a divisão

1 Calcule usando o recurso das multiplicações sucessivas:

a) 27 × 4 =

b) 123 × 4 =

c) 33 × 8 =

d) 235 × 8 =

e) 125 × 8 =

f) 12 × 16 =

2 Calcule usando o recurso das divisões sucessivas:

a) 56 ÷ 4 =

b) 76 ÷ 4 =

c) 96 ÷ 4 =

d) 120 ÷ 4 =

e) 92 ÷ 8 =

f) 236 ÷ 8 =

g) 500 ÷ 8 =

h) 984 ÷ 8 =

3 Ainda usando o mesmo tipo de recurso, calcule:

a) 56 ÷ 8 =

b) 96 ÷ 8 =

c) 120 ÷ 8 =

d) 152 ÷ 8 =

e) 200 ÷ 8 =

f) 272 ÷ 8 =

g) 600 ÷ 8 =

h) 1.000 ÷ 8 =

4 Multiplique por 5 usando a estratégia do cálculo mental:

a) 12 × 5 =

b) 23 × 5 =

c) 48 × 5 =

d) 136 × 5 =

e) 142 × 5 =

ORIENTAÇÃO DE ESTUDO

Se perceber que errou algum exercício, procure descobrir qual foi o erro e tente refazer o exercício. Caso não esteja conseguindo, é interessante anotar e levar sua dúvida ao professor.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Células "vazias"

1

a) $6 \times (200 + 50 + 7) = 1.200 + 300 + 42 = 1.542$

b)

	C	D	U
	4	2	3
		×	5
		1	5
+	1	0	0
2	0	0	0
2	1	1	5

c) Repare que todos os números conhecidos são múltiplos de 7 (da tabuada do 7), então a multiplicação é por 7.

56 = 7 × 8; 350 = 7 × 50 e 2.100 = 7 × 300.
Portanto, as parcelas que compõem o outro fator devem ser 300 + 50 + 8;
7 × 358 = 2.100 + 350 + 56 = 2.506.

2 Na tabuada do 6, é possível perceber que há dois números que multiplicados por 6 resultam em um número com 8 na casa das unidades (6 × 3 = 18 e 6 × 8 = 48). Observando a segunda coluna, é preciso descobrir qual é o número que, somado a 8, resulta em um total que termina em 2. Esse número é o 4 (4 + 8 = 12). Logo, o algarismo das unidades do primeiro fator é 8. E a multiplicação é 6 × 438; as multiplicações parciais são 48, 180 e 2.400. Confira: 6 × 438 = 2.628.

	C	D	U
	4	3	8
		×	6
		4	8
+	1	8	0
2	4	0	0
2	6	2	8

Atividade 2 - Exercitando a operação de divisão

1 São divisões exatas:

a) 41; b) 174; d) 27; f) 123; h) 41; i) 62; j) 31.

2 Existem várias estratégias para se calcular o total, destacando, por exemplo, o recurso de agrupar quantias que dão um resultado redondo:

157 + 23 = 180; 145 + 35 = 180; ficou 120 + 180 + 180 + 18 = 300 + 198 = 498. O total de gastos é R$ 498,00. Descontando o que foi gasto do total obtido com a venda dos cachorros-quentes, tem-se: 1.346 – 498 = 848. O lucro foi R$ 848,00. Então, 848 ÷ 4 = 212. Logo, cada sócio recebeu R$ 212,00.

Atividade 3 - Multiplicando e dividindo mentalmente

1

20 ÷ 10 = 2	200 ÷ 100 = 2	2.000 ÷ 1.000 = 2
30 ÷ 10 = 3	300 ÷ 100 = 3	3.000 ÷ 1.000 = 3
50 ÷ 10 = 5	500 ÷ 100 = 5	5.000 ÷ 1.000 = 5
70 ÷ 10 = 7	700 ÷ 100 = 7	7.000 ÷ 1.000 = 7
80 ÷ 10 = 8	800 ÷ 100 = 8	8.000 ÷ 1.000 = 8
120 ÷ 10 = 12	1.200 ÷ 100 = 12	12.000 ÷ 1.000 = 12
200 ÷ 10 = 20	2.000 ÷ 100 = 20	20.000 ÷ 1.000 = 20
450 ÷ 10 = 45	4.500 ÷ 100 = 45	45.000 ÷ 1.000 = 45
540 ÷ 10 = 54	5.400 ÷ 100 = 54	54.000 ÷ 1.000 = 54
2.000 ÷ 10 = 200	7.500 ÷ 100 = 75	75.000 ÷ 1.000 = 75
3.100 ÷ 10 = 310	21.000 ÷ 100 = 210	125.000 ÷ 1.000 = 125
6.780 ÷ 10 = 678	99.900 ÷ 100 = 999	213.000 ÷ 1.000 = 213

2 O que se espera que tenha descoberto é que há uma regularidade quanto ao número de zeros nos termos da divisão e que, por isso, no resultado eles não aparecem.

3 Para dividir por 10, basta cortar um zero; por 100, dois zeros; e por 1.000, três zeros.

Atividade 4 - Multiplicando por 5 mentalmente

1 O resultado dos dois procedimentos é o mesmo.

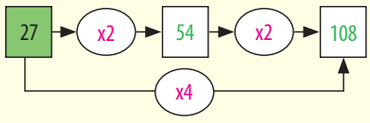
2 Qualquer que seja o número escolhido, o resultado da multiplicação por 5 é igual ao resultado da multiplicação por 10 seguida da divisão por 2.

3 Sim, essa regra funciona para qualquer número que se pensar, porque 5 = 10 ÷ 2.

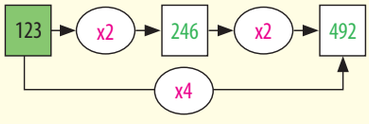
Atividade 5 - Exercitando a multiplicação e a divisão

1

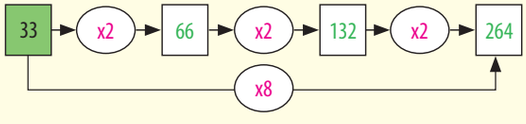
a) 27 × 4



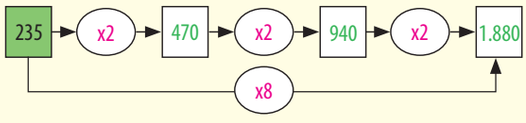
b) 123 × 4



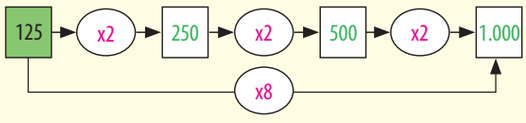
c) 33 × 8



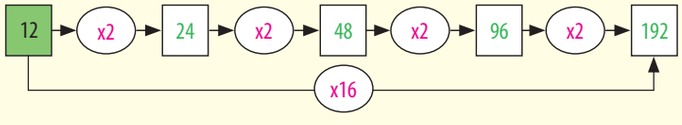
d) 235 × 8



e) 125 × 8



f) 12 × 16

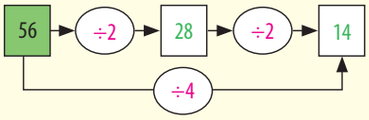


HORA DA CHECAGEM

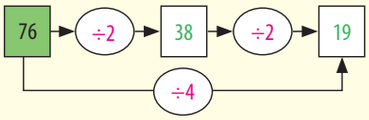
HORA DA CHECAGEM

2

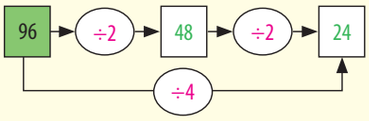
a) 56 ÷ 4



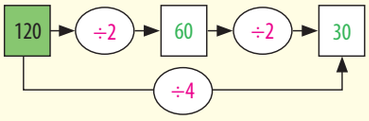
b) 76 ÷ 4



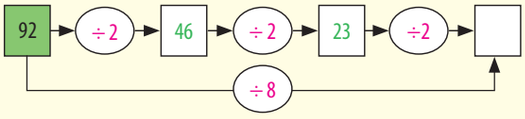
c) 96 ÷ 4



d) 120 ÷ 4

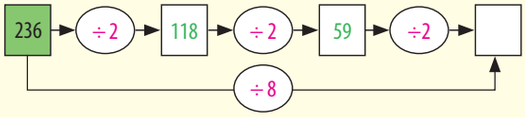


e) 92 ÷ 8



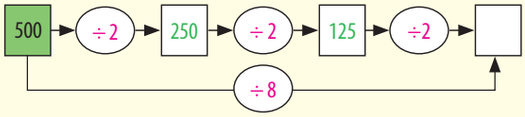
23 é ímpar. Não é divisível por 2. Logo, 92 não é divisível por 8. O resultado não é um número natural, é 11,5.

f) 236 ÷ 8



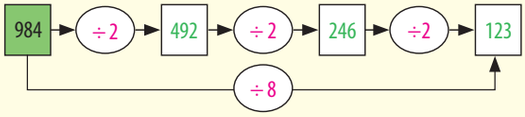
59 é ímpar. Não é divisível por 2. Logo, 236 não é divisível por 8. O resultado não é um número natural, é 29,5.

g) 500 ÷ 8



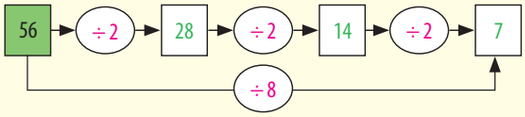
125 é ímpar. Não é divisível por 2. Logo, 500 não é divisível por 8. O resultado não é um número natural, é 62,5.

h) 984 ÷ 8

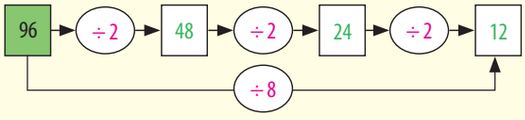


3

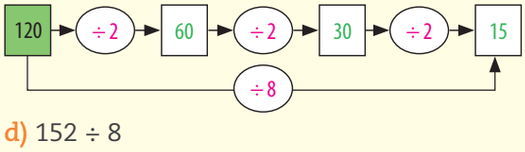
a) 56 ÷ 8



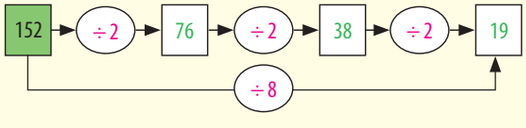
b) 96 ÷ 8



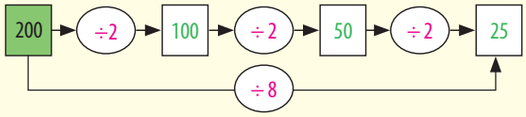
c) 120 ÷ 8



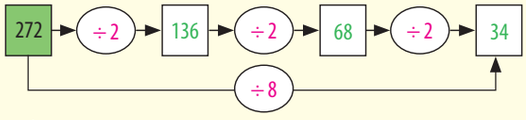
d) 152 ÷ 8



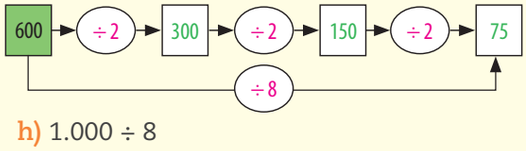
e) 200 ÷ 8



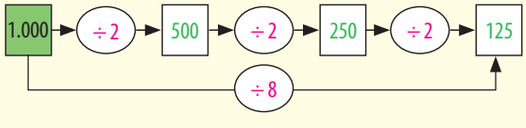
f) 272 ÷ 8



g) 600 ÷ 8



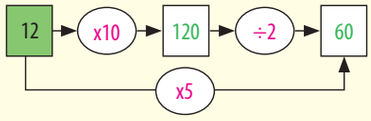
h) 1.000 ÷ 8



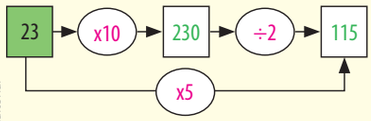
HORA DA CHECAGEM

4

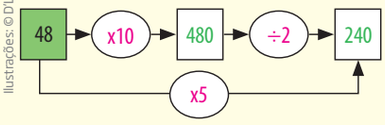
a) 12 × 5



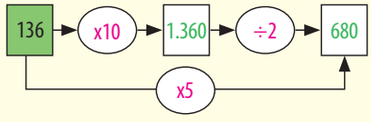
b) 23 × 5



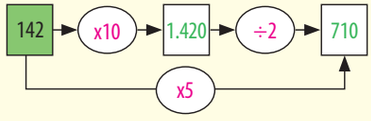
c) 48 × 5



d) 136 × 5



e) 142 × 5



Ilustrações: © D'Livros Editorial

Registro de dúvidas e comentários

TEMA 3

Divisões, adições e subtrações nas compras com desconto ou a prazo

O objetivo deste tema é explorar um assunto muito presente no cotidiano: o desconto nas compras a vista ou o acréscimo, em forma de juros, nas compras a prazo, discutindo as formas usadas para o cálculo desses valores.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

A venda de produtos em várias prestações com ou sem juros é uma prática muito usada atualmente. Procure atentar para estas situações:

- um produto oferecido em várias prestações que podem ser iguais e sem juros no cartão de crédito ou com um pequeno acréscimo, financiado pela própria loja;
- lugares que oferecem um desconto no valor gasto se o pagamento for feito a vista, de preferência em dinheiro.

Certamente você reconhece uma delas, ou as duas, não?

A divisão e a multiplicação nas compras a vista e a prazo

Na loja Compretudo, todos os produtos estão sendo vendidos com descontos de 10%, que equivale à décima parte do preço inicial.

Para calcular 10%, basta dividir a quantia por 10.



© DVLivros Editorial

Nos cartazes acima, estão registrados os preços dos produtos sem o desconto.

Calcule quanto será pago por cada produto com o desconto de 10%.

Veja, ao lado, como um cliente calculou o preço do liquidificador com o desconto.

O cálculo está certo. Explique por quê.

10% de 130 é igual a 13.

130 – 13 = 117.

Vou pagar R$ 117,00 pelo liquidificador.

Em algumas situações de compra e venda, o cliente tem de pagar um acréscimo ao preço da compra na forma de juros.

Suponha um tipo de oferta em que um produto pode ser pago a vista com desconto ou após certo período.

Na loja Compreaqui, as mesmas mercadorias podem ser pagas no ato da compra, com 10% de desconto, ou depois de três meses, com um acréscimo de 10% sobre o preço sem desconto.



© D'Livros Editorial

Calcule quanto será pago por cada produto com o acréscimo de 10%.

Veja, ao lado, como um cliente calculou o preço do liquidificador com o acréscimo de 10%.

O cálculo está certo. Explique por quê.

10% de 130 é igual a 13.

130 + 13 = 143.

Vou pagar R$ 143,00 pelo liquidificador.

IMPORTANTE!

As questões propostas ao longo do texto buscam familiarizá-lo com esse tipo de cálculo, por isso suas respostas não precisam ser iguais às colocadas aqui. Estas apenas procuram mostrar o tipo de raciocínio que você poderia fazer para resolvê-las.

- Valor de cada produto com desconto: para resolver a questão, basta fazer uma divisão por 10, que pode ser feita mentalmente, e depois uma subtração. Preços com 10% de desconto: jogo de panelas (70 – 7 = 63; R$ 63,00); impressora (240 – 24 = 216; R$ 216,00); TV (240 – 24 = 216; R$ 216,00) e computador (680 – 68 = 612; R$ 612,00).

- O cálculo feito pelo cliente está correto porque ele descontou 10% do valor original do produto.

- Valor de cada produto com acréscimo: para resolver a proposta com juros, basta fazer uma divisão por 10 seguida de uma adição. Preços: jogo de panelas (70 + 7 = 77; R$ 77,00); impressora (240 + 24 = 264; R$ 264,00); TV (240 + 24 = 264; R$ 264,00) e computador (680 + 68 = 748; R$ 748,00).

- O cálculo está correto porque o cliente acrescentou 10% ao valor original do produto.

ATIVIDADE 1 Exercitando os cálculos em compras a vista e a prazo

1 Seu Antônio e dona Maria resolveram comprar uma geladeira nova. A loja tem três planos de pagamento, como se vê ao lado:

A: A vista, por R$ 845,00.

B: A prazo, com uma entrada de R$ 100,00 e 5 prestações de R$ 150,00.

C: A prazo, em 8 prestações de R$ 109,00.

Quantos reais a mais o casal vai pagar se optar pelos planos B ou C?

2 Depois de receber seu salário, João separa o dinheiro correspondente às despesas com aluguel, água, luz, gás, telefone, alimentação e transporte, como você pode ver na tabela a seguir. O que sobra, ele divide igualmente pelas quatro semanas do mês, para gastar com lazer e cultura. Quanto ele dispõe para gastar com lazer e cultura no mês? E por semana? Calcule.

Dados: salário líquido do João = R$ 1.530,00.

Despesas	Valores em reais (R$)
Aluguel	540,00
Luz	23,00
Água	11,00
Gás	9,00
Telefone	63,00
Alimentação	370,00
Lazer e cultura no mês	_____
Lazer e cultura por semana	_____

A seguir você verá, na seção *Desafio*, uma questão sobre esse assunto da forma como costuma aparecer em concursos. Antes, porém, veja como poderia fazer para resolver uma questão semelhante:

O Joca aplicou seu décimo terceiro salário no valor de R$ 2.400,00 num fundo de pensão que remunera 24% de juros simples ao ano, durante 2 anos e meio. Quanto ele tem acumulado no fundo após esse período?

Para calcular 1%, basta dividir o valor por 100, então: 1% de 2.400 = 2.400 ÷ 100 = 24, portanto 2% de 2.400 = 2 × 24 = 48. Esse é o rendimento por mês. Como a aplicação foi de 2 anos e meio, são 30 meses, logo a remuneração será de 30 × 48 = 1.440. Juntando ao valor inicial, tem-se 2.400 + 1.440 = 3.840. O acumulado será de R$ 3.840,00.

DESAFIO

Um capital de R$ 1.600,00 foi aplicado durante 2 anos e 3 meses, a uma taxa de juros simples de 60% ao ano. Qual foi o montante recebido pelo investidor ao final desse investimento?

a) R$ 2.160,00 **b)** R$ 2.208,00 **c)** R$ 3.760,00 **d)** R$ 3.808,00

Concurso Prefeitura de Arapoti (PR), 2012. MSConcursos. Disponível em: <http://www.msconcursos.c+F42om.br/admin/concurso/download.php?file=arq_2221.pdf&name=AGENTE%20COMUNIT%C1RIO%20DE%20SA%DADE.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Exercitando os cálculos em compras a vista e a prazo

1 *Plano B*: 100 + 5 × 150,00 = 100 + 750 = 850.

850 – 845 = 5. O plano B é R$ 5,00 mais caro do que o plano A.
Plano C: 8 × 109 = 872.

HORA DA CHECAGEM

872 – 845 = 27. O plano C é R$ 27,00 mais caro do que o plano A.
872 – 850 = 22. O plano C é R$ 22,00 mais caro do que o plano B.

	Plano A	Plano B	Plano C
A vista	845	0	0
Entrada	0	100	0
Prestações	0	5 × 150 = 750	8 × 109 = 872
TOTAL	**845**	**850**	**872**

2 Total das despesas fixas: 540 + 23 + 11 + 9 + 63 + 370 = 1.016.

Sobram para gastos com lazer e cultura: 1.530 – 1.016 = 514.
Gastos com lazer e cultura por semana: 514 ÷ 4 = 128,50.
João dispõe de R$ 514,00 para gastar com lazer e cultura no mês, ou seja, R$ 128,50 para gastar por semana.

Desafio

Alternativa correta: **c**. 60% ao ano dá um rendimento de 6 vezes 10% de 1.600, isto é, 6 × 160 = 960 ao ano.
Em 2 anos serão R$ 1.920,00.
Para saber quanto o capital renderia em 3 meses, considere que 60% ao ano corresponde a 5% ao mês (60 ÷ 12 = 5), então, em 3 meses, seriam mais 15%.
Como 5% é metade de 10%, então 15% equivale a 160 + 80 = 240.
Assim, em 2 anos e 3 meses, o rendimento será de 1.920 + 240 = 2.160.
Ao final do investimento, o investidor terá o valor inicial mais os rendimentos, isto é:
1.600 + 2.160 = 3.760.
Logo, o investidor receberá, ao fim do investimento, R$ 3.760,00.



Registro de dúvidas e comentários

NÚMEROS QUEBRADOS: AS FRAÇÕES

TEMAS

1. O todo e as partes
2. Frações equivalentes

Introdução

Os números quebrados são uma construção dos seres humanos, motivada por necessidades práticas, como medir comprimentos, superfícies e outras grandezas físicas.

O todo e as partes TEMA 1

Aqui você perceberá como é fundamental a relação parte-todo para entender os números quebrados, pois as frações podem ser entendidas como parte de um todo.



O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já comprou ou viu alguém comprar meia dúzia de ovos, um quarto de queijo fatiado etc.? O uso dessas expressões faz parte do nosso cotidiano, não é?

E se, antes de ir ao supermercado, você fosse montar uma lista de compras. Como escreveria essas quantidades?

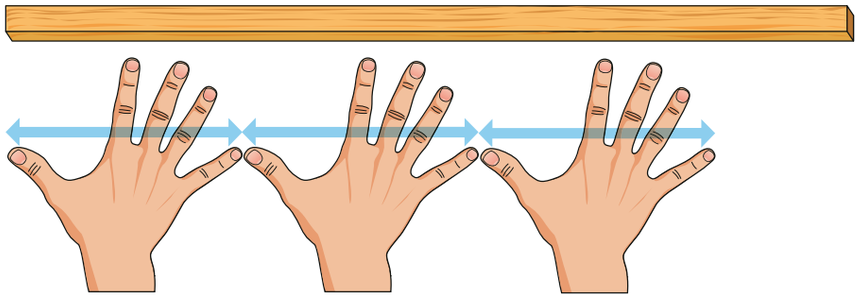


Frações

Na vida e na escola, os primeiros números que se aprendem são os números para contar, ou seja, os números naturais (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...).

Mas, quando os seres humanos precisaram medir e quantificar coisas, eles se deram conta de que os números naturais não eram suficientes para representar

tudo o que necessitavam. Quando usavam palmos para medir o comprimento de alguns objetos, percebiam que nem tudo podia ser medido contando uma quantidade inteira de palmos. Um pedaço de madeira, por exemplo, poderia medir 3 palmos e "alguma coisa a mais"; e esse "alguma coisa" era menor que um palmo, ou seja, menor que uma unidade.

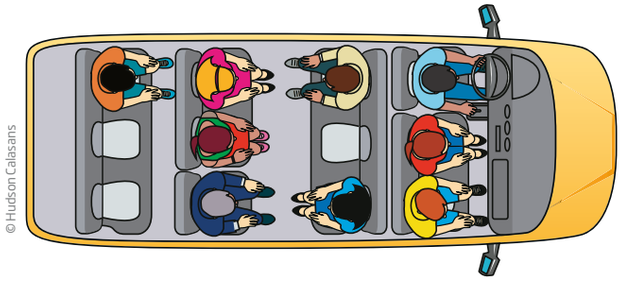


© Hudson Calasans

Problemas de medida como esse motivaram a invenção das **frações**.

As frações ou "números quebrados" – como eram chamados pelos povos da Antiguidade – foram uma ideia útil para resolver problemas de muitos tipos. Elas são usadas para representar a parte de um todo.

É possível dizer, por exemplo, que apenas uma fração dos 12 bancos de uma van está ocupada pelos passageiros e pelo motorista.



© Hudson Calasans

O todo está representado pelos 12 lugares, e a parte, pelos 9 bancos ocupados:

- assentos ocupados: 9 lugares;
- o todo (a van cheia): 12 lugares.

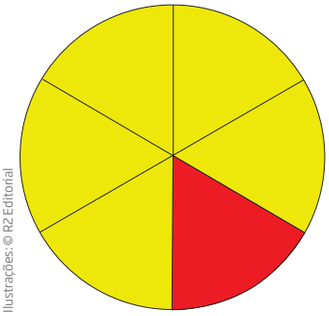
VOCÊ SABIA?

A palavra "fração" tem origem na palavra *fractio*, que vem do latim e significa "quebrado". O latim era uma língua falada por povos que habitavam a região central da Itália e disseminou-se por todos os territórios do Império Romano, dando origem ao português e a outras línguas. Por isso, muitas palavras que têm essa mesma raiz também começam por "fra" e sugerem a ideia de quebrado, como fragmento e fratura, frágil e fraco (que pode ser quebrável), entre outras.

Outro exemplo bem comum de uso de frações aparece na divisão de pizzas em fatias.



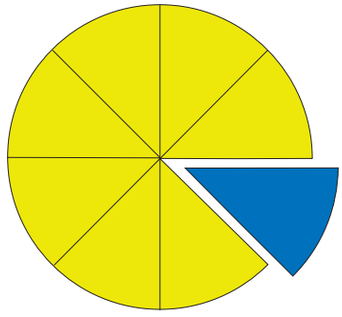
Quando se divide uma pizza, cada fatia representa uma fração do todo, da pizza inteira. Nas pizzarias, é comum dividi-la em 6 ou 8 fatias.



Ilustrações: © R2 Editorial

A “pizza” ao lado foi dividida em 6 partes iguais. A fatia vermelha representa a **sexta** parte da pizza inteira.

A “pizza” ao lado foi dividida em 8 partes iguais. A fatia azul representa a **oitava** parte da pizza inteira.



Quando se usa frações para quantificar ou comparar, deve-se tomar cuidado para que elas se refiram ao mesmo todo.

O que você escolheria comer quando estivesse com muita fome: 1 pedaço de uma pizza grande dividida em 8 partes iguais ou 1 pedaço de uma pizza de tamanho pequeno dividida em 4 partes iguais?



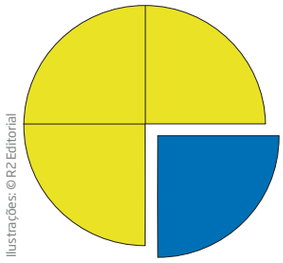


Fotos: © Paulo Savala

Sua escolha dependeu do tamanho da pizza?

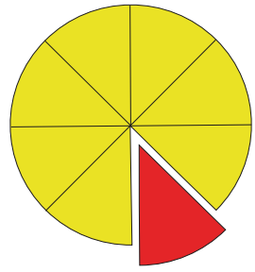
Agora, se as pizzas fossem do mesmo tamanho, mas divididas em quantidades diferentes de partes, qual seria o maior pedaço?

O todo dividido em 4 partes:



Ilustrações: © R2 Editorial

O todo dividido em 8 partes:



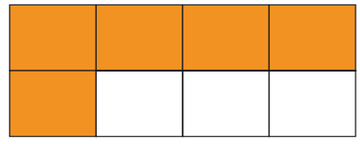
A quarta parte azul da pizza à esquerda é maior (o dobro) que a oitava parte vermelha da pizza à direita: $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{8}$.

Assim, quanto maior for o número de partes em que se dividir o todo, menor será a parte obtida.

Visualização e representação de frações

Na representação de um número fracionário, usam-se dois números inteiros separados por uma barra horizontal. O número abaixo da barra horizontal tem de ser necessariamente diferente de zero.

Observe o retângulo dividido em 8 partes iguais, como se pode encontrar em barras de chocolate:



Cinco partes estão pintadas de laranja; logo, o número 5 numera essas partes, e o número 8 denomina o total de partes em que a barra foi dividida. Assim, a parte laranja, em relação ao todo, é representada pela fração $\frac{5}{8}$.

O número acima da barra horizontal é chamado **numerador**, e o número a baixo, **denominador**.

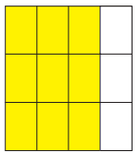
$$\frac{a \leftarrow \text{Numerador} \leftarrow \text{indica o número de partes consideradas}}{b \leftarrow \text{Denominador} \leftarrow \text{indica o total de partes em que o todo foi dividido}}$$

ATIVIDADE 1 A forma das frações

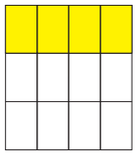
Nesta atividade, você fará exercícios de aplicação desse conteúdo, assim como a leitura correta das frações, percebendo o que elas expressam e a função do numerador e do denominador.

1 Represente as regiões pintadas usando a forma fracionária:

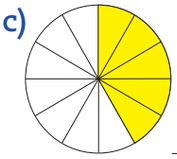
a) _____



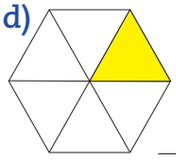
b) _____



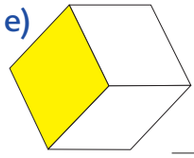
c) _____



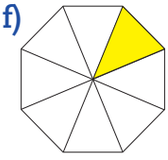
d) _____



e) _____



f) _____



Ilustrações: © R2 Editorial

2 Desenhe regiões retangulares ou circulares relacionadas às frações a seguir:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{1}{8}$

g) $\frac{1}{4}$

h) $\frac{3}{8}$

Nomenclatura das frações

As palavras meio, terço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo, nono e décimo são usadas para nomear frações com denominadores de 2 a 10.

Para denominadores maiores do que 10, acrescenta-se à leitura do denominador a palavra **avos**. Veja os exemplos:

$\frac{1}{23}$ → um, vinte e três avos

$\frac{37}{365}$ → trinta e sete, trezentos e sessenta e cinco avos

As frações cujos denominadores são 10, 100, 1.000, 10.000, e assim por diante, são chamadas frações decimais e recebem denominações especiais.

$\frac{1}{10}$ → um décimo

$\frac{1}{100}$ → um centésimo

$\frac{1}{10.000}$ → um décimo de milésimo

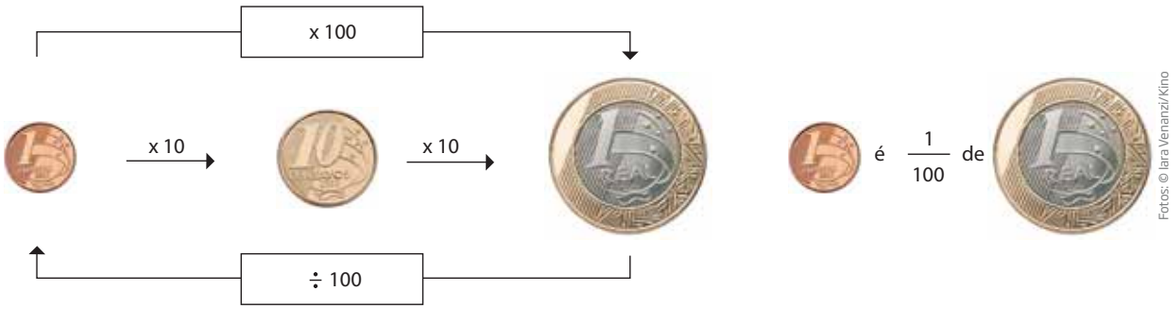
$\frac{1}{1.000.000}$ → um milionésimo

Frações e a divisão da moeda brasileira

As frações estão presentes no dia a dia. Qualquer pessoa que usa dinheiro se relaciona com frações direta ou indiretamente, pois nossa moeda é dividida em partes que são frações. Veja como isso acontece.

1 centavo é a centésima parte de 1 real.

Diz-se que vale "1 cem avos" de 1 real, daí o nome centavo.



Fotos: © Iara Venanzi/Kino

ATIVIDADE 2 Qual é a correspondência?

Indique a fração representada pelas moedas a seguir.



a) é _____ de

b) é _____ de

c) é _____ de

d) é _____ de

e) é _____ de

f) é _____ de

g) é _____ de

h) é _____ de

Fotos: © Iara Venanzi/Kino

Fração como operador

Os problemas mais comuns em que se usam as frações são de dois tipos: os que você tem de representar a parte do todo e aqueles em que tem de calcular quanto é a parte do todo.

Veja algumas estratégias para calcular a parte correspondente à fração de determinada quantidade.

Suponha que, em uma empresa de 40 funcionários, $\frac{3}{5}$ dos postos de trabalho são ocupados por mulheres, e os demais, por homens. Quantos funcionários de cada sexo trabalham nessa empresa?

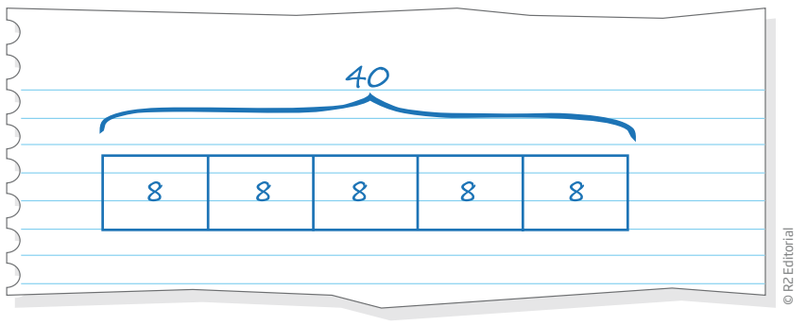
Como a fração correspondente envolve quintas partes, divide-se o todo por 5 e multiplica-se por 3.

$40 \div 5 = 8$, que é a quinta parte de 40, portanto $\frac{1}{5}$ de 40 = 8;

$\frac{3}{5}$ de 40 = 24, que é o número de trabalhadores do sexo feminino.

O restante $\left(\frac{2}{5}\right.$ de 40 = 16 ou 40 – 24 = 16$\left.\right)$ é o número de trabalhadores do sexo masculino.

$\frac{3}{5}$ é o triplo de $\frac{1}{5}$, logo $\frac{3}{5}$ de $40 = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right.$ de $40\left.\right) = 3 \times 8 = 24$.

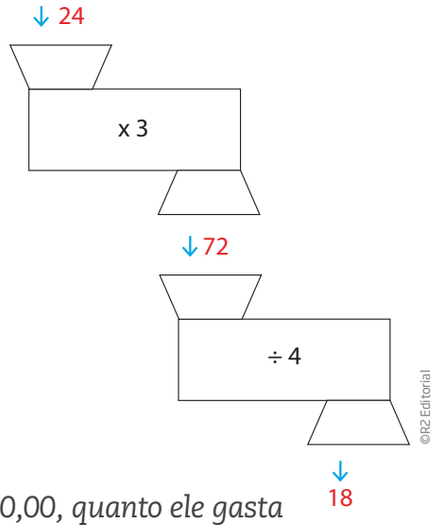


© R2 Editorial

Também é possível usar o chamado modelo de máquina (veja o exemplo a seguir) para calcular a fração de determinada quantidade.

Considere, por exemplo, a situação de uma oficina com 24 veículos para consertar, dos quais $\frac{3}{4}$ estão na funilaria, e o restante, na seção de pintura. Quantos são os carros que estão em cada seção?

No modelo de máquina, para calcular $\frac{3}{4}$ de determinada quantidade, primeiro multiplica-se o total (24) pelo numerador e, em seguida, divide-se o resultado pelo denominador. Veja o esquema ao lado.



©R2 Editorial

Se a oficina tinha 24 carros, então 18 estavam na funilaria, e 6, na seção de pintura (24 – 18 = 6).

Veja essa outra situação. *Um trabalhador gasta* $\frac{2}{3}$ *do que ganha em moradia e transporte. Se o salário dele é de R$ 960,00, quanto ele gasta com moradia e transporte?*

Para responder à questão, é preciso calcular $\frac{2}{3}$ de 960. Para isso, divide-se 960 por 3, e multiplica-se o resultado por 2.

960 ÷ 3 = 320 → 320 × 2 = 640

Observe que, ainda que se inverta a ordem em que as operações são feitas, nesse caso, obtém-se o mesmo resultado:

960 × 2 = 1.920 → 1.920 ÷ 3 = 640

$\frac{2}{3}$ de 960 = $\frac{2 \times 960}{3} = \frac{1.920}{3} = 640$

Para adquirir destreza no cálculo de frações, é preciso ter domínio das operações básicas, em especial da multiplicação e da divisão.

ATIVIDADE 3 Cálculo mental

Nesta atividade, será proposta a realização de cálculo mental, isto é, você deve fazer as contas "de cabeça", sem usar lápis e papel. É importante que você perceba que realiza esse procedimento muitas vezes em situações do dia a dia.

Use um fato já conhecido relacionado à fração que você vai calcular. Por exemplo, se você descobrir o resultado de $\frac{1}{2}$ de 300, para saber quanto é $\frac{1}{4}$ de 300, basta calcular a metade do valor anterior. Outras relações poderão ser feitas; o importante é que elas ajudem a fazer os demais cálculos.

1 Calcule mentalmente:

a) $\frac{1}{2}$ de 300 = _____

b) $\frac{1}{4}$ de 300 = _____

c) $\frac{1}{2}$ de 150 = _____

d) $\frac{1}{4}$ de 600 = _____

e) $\frac{1}{3}$ de 600 = _____

f) $\frac{2}{3}$ de 600 = _____

g) $\frac{2}{3}$ de 1.800 = _____

2 Calcule mentalmente os valores das frações correspondentes às quantidades:

a) $\frac{1}{3}$ de 72 = _____

b) $\frac{2}{3}$ de 72 = _____

c) $\frac{1}{4}$ de 72 = _____

d) $\frac{3}{4}$ de 72 = _____

e) $\frac{1}{5}$ de 720 = _____

f) $\frac{2}{5}$ de 720 = _____

g) $\frac{3}{5}$ de 720 = _____

h) $\frac{1}{5}$ de 360 = _____

3 Continue calculando mentalmente:

a) $\frac{2}{5}$ de 300 = _____

b) $\frac{2}{5}$ de 600 = _____

c) $\frac{2}{5}$ de 75 = _____

d) $\frac{3}{5}$ de 300 = _____

e) $\frac{3}{5}$ de 600 = _____

f) $\frac{3}{5}$ de 75 = _____

g) $\frac{3}{4}$ de 600 = _____

h) $\frac{3}{4}$ de 840 = _____

i) $\frac{3}{4}$ de 420 = _____

j) $\frac{4}{5}$ de 600 = _____

k) $\frac{4}{5}$ de 720 = _____

l) $\frac{5}{6}$ de 600 = _____

m) $\frac{5}{6}$ de 1.800 = _____

n) $\frac{5}{6}$ de 72 = _____

o) $\frac{5}{6}$ de 144 = _____

DESAFIO

Em uma turma há 10 meninos e 15 meninas. A fração que pode representar a relação entre o número de meninos e o total de estudantes dessa turma é:

a) $\frac{10}{15}$ b) $\frac{15}{10}$ c) $\frac{10}{25}$ d) $\frac{25}{10}$

Saresp 2005. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2005/Arquivos/Provas_EF_2005/6%C2%B0s%C3%A9rie%20EF%20tarde.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - A forma das frações

1 Como explicado anteriormente, é preciso considerar a parte amarela em relação ao todo.

a) $\frac{9}{12}$ c) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{1}{3}$

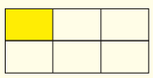
b) $\frac{4}{12}$ d) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{8}$

2 Respostas possíveis:

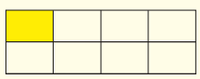
a) 

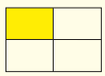
b) 

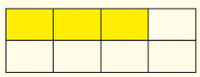
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

Ilustrações: © R2 Editorial

Atividade 2 - Qual é a correspondência?

1

a) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{5}$ g) $\frac{1}{25}$

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{10}$ h) $\frac{1}{50}$

Atividade 3 - Cálculo mental

1

a) 150

b) $\frac{1}{4}$ é metade de $\frac{1}{2}$; se $\frac{1}{2}$ de 300 é 150, então $\frac{1}{4}$ de 300 é metade de 150, que é 75.

c) $\frac{1}{2}$ de 150 equivale a $\frac{1}{4}$ de 300, que é 75.

d) 600 = 2 × 300; se $\frac{1}{4}$ de 300 é 75, então $\frac{1}{4}$ do dobro de 300 será 2 × 75 = 150.

e) 200

f) $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$ de 600 = $2 \times \left(\frac{1}{3} \text{ de } 600\right) = 2 \times 200 = 400$.

g) 1.800 = 3 × 600; se $\frac{2}{3}$ de 600 = 400, então $\frac{2}{3}$ de 1.800 será 3 × 400 = 1.200.

2

a) 24

b) 2 × 24 = 48

c) 18

d) 3 × 18 = 54

e) 144

f) 2 × 144 = 288

g) 3 × 144 = 432 ou $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 144 + 288 = 432$

h) 360 é metade de 720; então, $\frac{1}{5}$ de 360 é metade de $\frac{1}{5}$ de 720; como $\frac{1}{5}$ de 720 é 144, $\frac{1}{5}$ de 360 é metade de 144, que é 72.

3

a) 120	**d)** 180	**g)** 450	**j)** 480	**m)** 1.500
b) 240	**e)** 360	**h)** 630	**k)** 576	**n)** 60
c) 30	**f)** 45	**i)** 315	**l)** 500	**o)** 120

Desafio

Alternativa correta: **c**. A turma completa é igual a 10 + 15 = 25. Portanto, a relação entre o total de meninos (10) e a turma completa (25) é $\frac{10}{25}$.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

Aqui você verá que frações equivalentes são aquelas que, mesmo que sejam escritas de formas diferentes, representam a mesma quantidade.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Se Marcela e Givanildo ganharam uma barra de chocolate e ela comeu metade da barra, e ele, $\frac{2}{4}$, quem comeu mais?

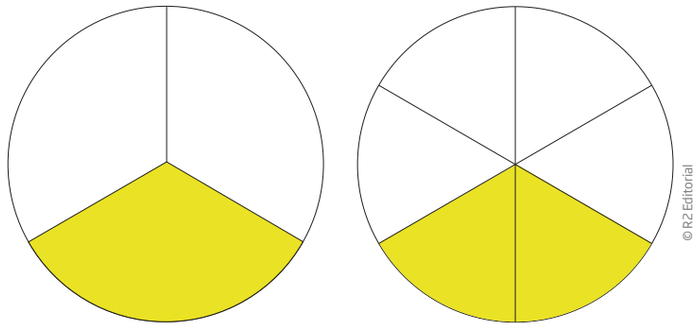
Para responder essa questão, você pode pensar que metade corresponde a $\frac{1}{2}$ ou a 1 parte de 2 e que $\frac{2}{4}$ correspondem a 2 partes de 4, que também é metade.

Portanto, ambos comeram a mesma quantidade de chocolate.

Equivalência entre frações

Um dos conceitos mais importantes, quando se trabalha com frações, é o de fração equivalente.

Retome a situação das fatias de pizza. Suponha um estabelecimento que trabalha com pizzas de um só tamanho, mas vende dois tipos de fatias: a grande, correspondente a $\frac{1}{3}$ da pizza, e a pequena, correspondente a $\frac{1}{6}$ da pizza. A fatia grande de pizza equivale a duas fatias pequenas.



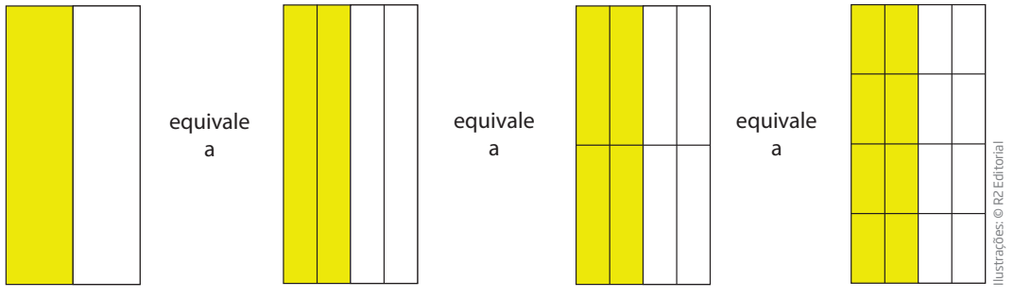
Diz-se, portanto, que as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ são equivalentes.

equi → termo relacionado a igualdade, equilíbrio, igual;

valente → termo relacionado a valor;

equivalente → equi + valente → igual valor.

A representação geométrica é útil para visualizar equivalências.



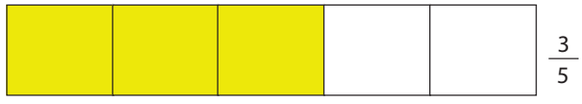
Ilustrações: © R2 Editorial

Em linguagem fracionária, pode-se escrever $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$.

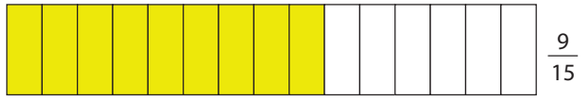
Aprenda mais sobre equivalências

Imagine uma tira de papel com uma parte pintada e que foi dobrada de dois modos distintos.

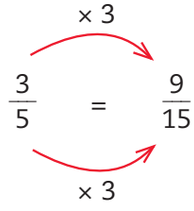
1º modo: dividida em 5 partes iguais, ficando 3 partes pintadas de amarelo; a parte pintada corresponde a $\frac{3}{5}$ da tira.



2º modo: agora, cada quinta parte da tira foi dividida em três partes iguais. Dessa forma, cada parte menor corresponde a $\frac{1}{15}$ da tira, e a parte pintada de amarelo, a $\frac{9}{15}$ da tira.



Veja que tanto a quantidade de partes pintadas de amarelo quanto o número total das partes foram multiplicadas por 3.

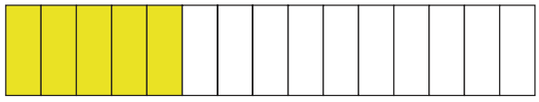


Pode-se dizer que as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{9}{15}$ são equivalentes.

Observe que, multiplicando o numerador e o denominador pelo mesmo número, desde que diferente de zero, obtêm-se frações equivalentes.

$$\frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{6}{10}\,;\ \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{3 \times 5} = \frac{9}{15}\,;\ \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{7 \times 5} = \frac{21}{35}$$

Observe outro exemplo de frações equivalentes, partindo da fração $\frac{5}{15}$.



Se o numerador e o denominador forem divididos por 5, obtém-se outra fração equivalente que pode ser representada do seguinte modo:



a) Qual é a representação fracionária desse novo esquema?

A representação fracionária é $\frac{1}{3}$.

b) O que você conclui?

É possível concluir, na prática, que $\frac{1}{3}$ *é equivalente a* $\frac{5}{15}$.

Observando a representação gráfica nessas questões, você deve ter percebido que:

a) A representação fracionária no novo esquema é $\frac{1}{3}$.

b) Que $\frac{5}{15}$ são equivalentes a $\frac{1}{3}$, pois o numerador e o denominador foram divididos pelo mesmo número.

ATIVIDADE 1 Frações equivalentes

1 Dê três frações equivalentes a:

a) $\frac{2}{7} =$ _____

b) $\frac{3}{10} =$ _____

c) $\frac{3}{5}$ = _____

d) $\frac{12}{20}$ = _____

e) $\frac{4}{9}$ = _____

f) $\frac{5}{12}$ = _____

g) $\frac{3}{7}$ = _____

2 Considere as frações $\frac{15}{35}, \frac{12}{28}, \frac{21}{49}, \frac{60}{70}, \frac{6}{14}, \frac{18}{28}, \frac{30}{35}$. Quais delas são equivalentes a $\frac{3}{7}$?

_____

_____

3 Encontre e escreva frações equivalentes a $\frac{3}{8}$ com:

a) denominador igual a 24: _____

b) denominador igual a 80: _____

c) numerador igual a 6: _____

d) numerador igual a 54: _____

4 Qual deve ser o valor numérico de cada letra para que as frações sejam equivalentes?

a) $\frac{a}{3} = \frac{12}{18}$

b) $\frac{3}{11} = \frac{x}{99}$

c) $\frac{4}{5} = \frac{32}{b}$

Frações e medida do tempo

Desde que o tempo começou a ser medido, há milhares de anos, a ideia de dividir o dia ou o mês em frações de tempo já estava presente.

O dia pode ser dividido em 2, 3, 4 ou mais partes, já a semana equivale aproximadamente à quarta parte do mês. O mês é a duodécima parte do ano, ou seja, $\frac{1}{12}$ do ano. Para calcular o 13º salário ou as férias proporcionais, por exemplo, também é preciso fazer alguns cálculos com frações.

Nesse sentido, quando você diz a uma pessoa que vai se atrasar um quarto de hora, quanto tempo essa fração representa?



VOCÊ SABIA?

A medição do tempo antes da existência do relógio esteve sempre associada à vida familiar e ao trabalho. Entre os povos primitivos em Madagascar[1], por exemplo, sabia-se contar meia hora pelo tempo de cozimento do arroz; em Cross River (Nigéria)[2], 15 minutos equivaliam ao tempo para o milho assar.

Fonte: THOMPSON, Edward Palmer. *Costumes em comum*. São Paulo: Companhia das Letras, 1998, p. 270.

[1] (N. E.) Ilha de Madagascar, país africano próximo à costa de Moçambique.
[2] (N. E.) Estado da Nigéria, na África.

ATIVIDADE 2 Frações no dia a dia

1 A quantas horas do dia corresponde cada fração?

a) $\frac{1}{2}$ do dia = _____

b) $\frac{1}{3}$ do dia = _____

c) $\frac{1}{4}$ do dia = _____

d) $\frac{1}{6}$ do dia = _____

e) $\frac{1}{8}$ do dia = _____

f) $\frac{1}{12}$ do dia = _____

2 Um estabelecimento comercial fica aberto 16 horas por dia. Que fração do dia esse estabelecimento:

a) fica aberto?

_____

b) fica fechado?

_____

3 Algumas pessoas costumam dormir pouco. Mateus dorme 6 horas por dia. Que fração do dia:

a) ele passa dormindo?

b) ele fica acordado?

4 Uma semana tem 168 horas. Que fração da semana representa 24 horas? Assinale a alternativa correta.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{1}{24}$

5 Os dias úteis de Marta são muito corridos, pois ela trabalha e estuda.



Marta trabalha das 7h às 13h.



À tarde, ela vai à escola de idiomas, onde estuda espanhol por 2 horas.



À noite, ela passa 4 horas na faculdade.

Fotos: © Paulo Savala

a) Que fração do dia de 24 horas ela:

- trabalha? _____
- estuda espanhol? _____
- estuda na faculdade? _____

b) Quantas horas ela estuda no total, durante um dia?

c) Que fração do dia ela estuda?

d) Que fração do dia ela estuda e trabalha?

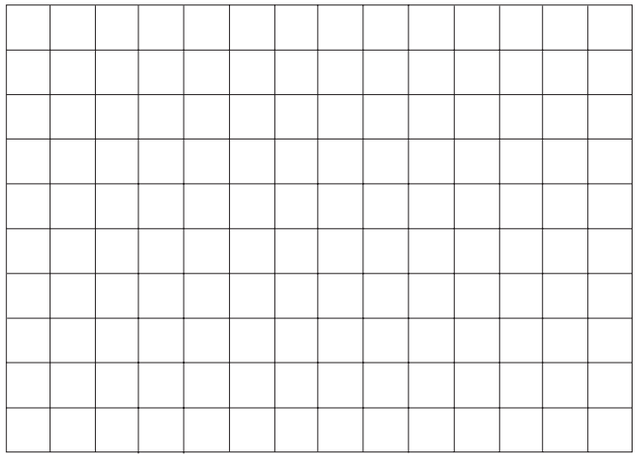
6 Indique quais são as adições corretas.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{24} + \frac{4}{24} = \frac{6}{24}$

7 Na malha quadriculada, faça o contorno de dois retângulos, cada um com 24 quadradinhos. Cada retângulo vai representar um dia de 24 horas.



a) No primeiro retângulo, pinte $\frac{6}{24}$ do dia.

b) No segundo retângulo, pinte $\frac{1}{4}$ do dia.

c) Compare as duas regiões pintadas. O que você descobriu?

_____

_____

DESAFIO

Robson utilizou $\frac{3}{4}$ de 1 litro de tinta para pintar a sala de sua casa. Sabendo que o restante da casa equivale a 3 vezes a área pintada da sala, quantos litros de tinta ele precisará para pintar os outros cômodos?

a) $2\frac{1}{4}$ litros b) $3\frac{3}{4}$ litros c) $\frac{9}{12}$ litros d) $\frac{12}{4}$ litros

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/6%C2%AA%20s%C3%A9rie%20EF/2_Tarde/Prova-MAT-6EF-Tarde.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Frações equivalentes

1 Lembre-se do que viu anteriormente, se o numerador e o denominador forem divididos ou multiplicados pelo mesmo número, a fração não se altera. Assim, a seguir são apresentadas algumas respostas possíveis:

a) $\frac{4}{14}$; $\frac{6}{21}$; $\frac{8}{28}$

b) $\frac{6}{20}$; $\frac{12}{40}$; $\frac{15}{50}$

c) $\frac{6}{10}$; $\frac{9}{15}$; $\frac{12}{20}$

d) $\frac{3}{5}$ (simplificação); $\frac{24}{40}$; $\frac{36}{60}$

e) $\frac{8}{18}$; $\frac{12}{27}$; $\frac{16}{36}$

f) $\frac{10}{24}$; $\frac{15}{36}$; $\frac{20}{48}$

g) $\frac{6}{14}$; $\frac{12}{28}$; $\frac{18}{42}$

2 As frações equivalentes a $\frac{3}{7}$ são $\frac{15}{35}$; $\frac{12}{28}$; $\frac{21}{49}$; $\frac{6}{14}$.

3 Lembre-se de que sempre que não perceber qual foi a multiplicação feita, faça a operação inversa, isto é, use a divisão. Por exemplo, no item **d**, calcule 54 ÷ 3 = 18 para descobrir por quanto multiplicar o 8.

a) Como 24 é o triplo de 8, basta multiplicar o numerador (o número 3) também por 3.

$$\frac{9}{24} \rightarrow \overset{\times 3}{\frac{3}{8} = \frac{9}{24}} \quad (\times 3)$$

b) 80 ÷ 8 = 10 → 10 × 3 = 30

$$\frac{30}{80} \rightarrow \overset{\times 10}{\frac{3}{8} = \frac{30}{80}} \quad (\times 10)$$

c) 6 ÷ 3 = 2 → 2 × 8 = 16

$$\frac{6}{16} \rightarrow \overset{\times 2}{\frac{3}{8} = \frac{6}{16}} \quad (\times 2)$$

d) 54 ÷ 3 = 18 → 18 × 8 = 144

$$\frac{54}{144} \rightarrow \overset{\times 18}{\frac{3}{8} = \frac{54}{144}} \quad (\times 18)$$

4

a) Veja que, no denominador da segunda fração, dá para fazer a operação inversa, isto é, a divisão; então calcule 18 ÷ 3 = 6, portanto a = 12 ÷ 6 = 2.

b) Aqui também dá para começar com a divisão 99 ÷ 11 = 9, então para achar o valor de **x** é só multiplicar o 3 por 9 → x = 3 × 9 = 27.

c) Nesse caso é só descobrir qual é o número que multiplicado por 4 dá 32. É o 8, então b = 5 × 8 = 40.

Atividade 2 - Frações no dia a dia

1 Como o dia possui 24 horas, tem-se:

a) $\frac{1}{2}$ de 24 = $\frac{1}{2} \times 24 = \frac{24}{2}$ = 12 horas

b) $\frac{1}{3} \times 24 = \frac{24}{3}$ = 8 horas

c) $\frac{1}{4} \times 24 = \frac{24}{4}$ = 6 horas

d) $\frac{1}{6} \times 24 = \frac{24}{6}$ = 4 horas

HORA DA CHECAGEM

e) $\frac{1}{8} \times 24 = \frac{24}{8} = 3$ horas **f)** $\frac{1}{12} \times 24 = \frac{24}{12} = 2$ horas

2

a) Ele fica aberto 16 horas das 24 horas do dia, então a fração é $\frac{16}{24}$, mas ela pode ser escrita de modo mais simples ao se dividir o 16 e o 24 por 8 → $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ do dia.

b) Ele fica fechado por 8 horas (24 – 16 = 8) e a fração será $\frac{8}{24}$, que também pode ter o 8 e o 24 divididos por 8 → $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ do dia.

3

a) $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ do dia. **b)** 24 – 6 = 18 → $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ do dia.

4 Alternativa correta: **c**. $\frac{24}{168} = \frac{1}{7}$

5

a) • 13 – 7 = 6 → $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. Ela trabalha $\frac{1}{4}$ do dia.

• $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$. Ela estuda espanhol $\frac{1}{12}$ do dia.

• $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Ela estuda na faculdade $\frac{1}{6}$ do dia.

b) 2 + 4 = 6. Ela estuda 6 horas no total, durante um dia.

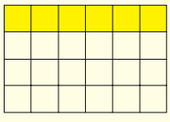
c) $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ do dia.

d) 6 + 6 = 12 → $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ do dia.

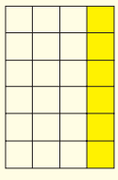
6 Todas as adições estão corretas. Lembrando que, ao realizar uma adição de frações, é necessário igualar os denominadores, então, se elas possuírem o mesmo denominador, é só mantê-lo e somar os numeradores, como foi feito nos itens *a* e *c*. Já em *b*, o resultado foi simplificado. Trata-se da mesma soma feita no item *a*.

7 Você pode pintar o número de quadradinhos na posição que preferir.

a) Resposta possível:



b) Resposta possível:



c) $\frac{6}{24}$ do dia equivalem a $\frac{1}{4}$ do dia.

Ilustrações: © R2 Editorial

Desafio

Alternativa correta: **a**. Se o restante da casa equivale a 3 vezes a área pintada, então serão usados $3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$. Como esta fração não corresponde a nenhuma das alternativas, pode-se escrever $\frac{9}{4}$ como $\frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$ ou $2\,\frac{1}{4}$.



Registro de dúvidas e comentários

Comparação entre frações (=, <, >)

Sabendo que Pedro comeu o equivalente a $\frac{4}{16}$ de uma pizza e que Bino comeu $\frac{3}{18}$ de uma pizza de mesmo tamanho, quem comeu mais?

Para respondermos essa pergunta, devemos saber comparar duas frações, ou seja, identificar qual tem o maior valor numérico.

Temos dois casos a considerar:

- **Caso 1**: *As frações têm o mesmo denominador.*

Neste caso, a fração que possuir o maior numerador será a de maior valor numérico.

- $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$, já que 5 = 5 e 3 > 2.
- $\frac{6}{7} < \frac{5}{7}$, já que 7 = 7 e 6 < 5.
- $\frac{5}{8} = \frac{5}{8}$, já que 8 = 8 e 5 = 5.

OBS.: As frações equivalentes são sempre iguais.

- **Caso 2:** *As frações tem denominadores diferentes.*

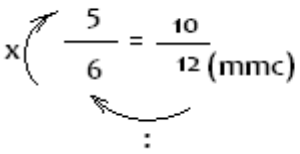
Neste caso devemos deixá-las com denominadores iguais e verificar seus numeradores. Vejamos um esquema:

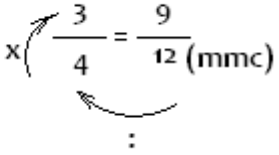
- $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$

Primeiramente, calculamos o MMC entre os denominadores 6 e 4:

6	4	2
3	2	2
3	1	3
1		MMC = 2 • 2 • 3 = 12

Em seguida, em cada fração dada, dividimos o MMC pelo denominador e multiplicamos pelo numerador:





Assim, comparar $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$ é o mesmo que comparar, respectivamente, $\frac{10}{12}$ e $\frac{9}{12}$.

Como 10 > 9, então,

$$\frac{10}{12} > \frac{9}{12} \quad \text{e} \quad \frac{5}{6} > \frac{3}{4}$$

Resolva

01. Preencha as lacunas com <, > ou =.

a) $\frac{3}{4} ____ \frac{4}{7}$ b) $\frac{12}{15} ____ \frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{4} ____ \frac{15}{12}$

Operações com números Reais

O conjunto dos números reais é formado por todos os números racionais e irracionais, ou seja, todos os inteiros, frações e decimais. Devemos, então, dominar as operações básicas (soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) neste conjunto numérico.

Inteiros

Soma e subtração

Devemos nos orientar pela seguinte regra:

"Sinais iguais, soma-se e repete-se o sinal; sinais diferentes, subtrai-se e coloca-se o sinal do maior número em módulo".

Exemplos:

$-2-1=-3$ $\quad -3+2=-1$

$+3+2=+5$ $\quad 1-5=-4$

Multiplicação e divisão

Devemos nos orientar pela seguinte regra:
"Sinais iguais, resultado positivo; sinais diferentes, resultado negativo".
Popularmente,

$$+\cdot+=+ \qquad +\div+=+$$
$$-\cdot-=+ \qquad -\div-=+$$
$$+\cdot-=- \qquad +\div-=-$$
$$-\cdot+=- \qquad -\div+=-$$

Exemplos:

$$-2\cdot(-3)=+6 \qquad +6\div(-2)=-3$$
$$+2\cdot(-3)=-6 \qquad -6\div(-2)=+3$$
$$-2\cdot(+3)=-6 \qquad -6\div(+2)=-3$$
$$+2\cdot(+3)=+6 \qquad +6\div(+2)=+3$$

Frações

Soma e subtração

Devemos:
a) *encontrar o m.m.c. dos denominadores*;
b) dividir o m.m.c. por cada denominador;
c) *multiplicar o resultado da divisão por cada numerador correspondente;*
d) efetuar as operações restantes.

Exemplos:

$$\frac{17}{18}+\frac{1}{15}=\frac{5\cdot17+6\cdot1}{90}=\frac{85+6}{90}=\frac{91}{90} \qquad \frac{17}{16}-\frac{3}{6}=\frac{3\cdot17-8\cdot3}{48}=\frac{51-24}{48}=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}$$

$m.m.c.(15,18)=90$ $\qquad$ $m.m.c.(6,16)=48$

15,18	2
15,9	3
5,3	3
5,1	5
1	2.3.3.5

6,16	2
3,8	2
3,4	2
3,2	2
3,1	3
1	2.2.2.2.3

Multiplicação

Multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador.
Exemplos:

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 8}=\frac{15}{56}$$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{7}}{7}=\frac{1}{7}$$

Divisão

Multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda.
Exemplos:

$$\frac{16}{5}\div\frac{8}{3}=\frac{\cancel{16}^{2}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{8}_{1}}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 1}=\frac{6}{5}$$

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{5}=\frac{3\cdot 8}{7\cdot 5}=\frac{24}{35}$$

Decimais

Soma e subtração

Armamos as operações de tal forma que apareçam *"vírgula sobre vírgula"*. Somamos ou subtraímos normalmente.

Exemplos:

$2{,}31+0{,}025=2{,}335$

$$\begin{array}{r} 2{,}310 \\ +\ 0{,}025 \\ \hline 2{,}335 \end{array}$$

$2+1{,}253=3{,}253$

$$\begin{array}{r} 2{,}000 \\ +\ 1{,}253 \\ \hline 3{,}253 \end{array}$$

$6{,}125-10{,}236=-4{,}111$

$$\begin{array}{r} 10{,}236 \\ -\ 6{,}125 \\ \hline 4{,}111 \end{array}$$

$6-5{,}999=0{,}001$

$$\begin{array}{r} 6{,}000 \\ -\ 5{,}999 \\ \hline 0{,}001 \end{array}$$

Multiplicação

Multiplicamos normalmente. O produto terá tantas casas decimais quanto os fatores.
Exemplos:

$2{,}31 \times 12{,}2 = 28{,}182$

$$
\begin{array}{rl}
 & 2{,}31 \quad \text{—— 2 casas} \\
\times & 12{,}2 \quad \text{—— 1 casa} \\
\hline
 & 462 \\
+ & 462 \\
 & 231 \\
\hline
 & 28{,}182 \quad \text{—— 3 casas}
\end{array}
$$

$123{,}4 \times 6{,}2 = 765{,}08$

$$
\begin{array}{rl}
 & 123{,}4 \quad \text{—— 1 casa} \\
\times & 6{,}2 \quad \text{—— 1 casa} \\
\hline
 & 2468 \\
+ & 7404 \\
\hline
 & 765{,}08 \quad \text{—— 2 casas}
\end{array}
$$

Divisão

Igualamos as casas decimais, eliminamos as vírgulas e dividimos normalmente.
Exemplos:

$28{,}182 \div 2{,}31 = 12{,}2$

$$
\begin{array}{r|l}
28{,}182 & 2{,}310 \\
\hline
-\,28182 & 231 \\
\quad 2310 & 12{,}2 \\
\hline
-\,5082 & \\
\quad 4620 & \\
\hline
-\,4620 & \\
\quad 4620 & \\
\hline
\quad (0) &
\end{array}
$$

$765{,}08 \div 6{,}2 = 123{,}4$

$$
\begin{array}{r|l}
765{,}08 & 6{,}20 \\
\hline
-\,76508 & 620 \\
\quad 620 & 123{,}4 \\
\hline
-\,1450 & \\
\quad 1240 & \\
\hline
-\,2108 & \\
\quad 1860 & \\
\hline
-\,2480 & \\
\quad 2480 & \\
\hline
\quad (0) &
\end{array}
$$

Resolva

02. Calcule:

a) $+(+3)=$

b) $-4-2=$

c) $-10+15=$

d) $(+3)+(+2)=$

e) $(-5)+(-1)=$

f) $(+9)-(-4)=$

g) $(+6)+(+5)=$

h) $-7+(+9)=$

i) $+6+(-4)=$

j) $(-20)+(+12)+(-40)=$

l) $(+8)\cdot(+5)=$

m) $(-3)\cdot(-9)=$

n) $(+4)\cdot(-2)=$

o) $(-1)\cdot(+8)=$

p) $(-7)\cdot(-5)-(-2)=$

q) $(+15)\div(+3)=$

r) $(-15)\div(+1)=$

s) $(+7)\div(-7)=$

t) $18\div6+(-28)\div(-4)=$

u) $36\div(-6)+5\cdot4=$

03. Efetue:

a) $-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=$

b) $\frac{7}{3}+2-\frac{1}{4}=$

c) $\left(+\frac{4}{9}\right)\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)=$

d) $\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{7}\right)=$

04. Efetue as operações indicadas.

a) $0{,}12345+1234{,}56$

b) $-31{,}56+123{,}009$

c) $1{,}23\cdot12{,}4$

e) $-0{,}12-0{,}123$

f) $21{,}866\div1{,}3$

g) $10-9{,}789$

h) $3+2{,}1758$

j) $9{,}984\div1{,}2$

05. Em certo país, os trabalhadores recebem dois salários mínimos em dezembro: o salário normal e o 13° salário. Se a pessoa trabalhou os 12 meses do ano, os dois salários serão iguais. Se a pessoa trabalhou uma fração do ano, o 13° salário corresponderá a essa fração do salário normal. Se o salário normal de uma pessoa é 516 reais e ela trabalhou 7 meses nesse ano, quanto ela vai receber de 13° salário?

06. João Carlos é operário e seu salário é apenas 520 reais por mês. Gasta $\frac{1}{4}$ com aluguel e $\frac{2}{5}$ com alimentação da família. Esse mês ele teve uma despesa extra: $\frac{3}{8}$ do seu salário foram gastos com remédios. Sobrou dinheiro?

GABARITO

01. *a) > b) > c) =*

02. *a) +3 b) -6 c) +5 d) +5 e) -6 f) +13 g) +11 h) +2 i) +2 j) -48*

l) +40 m) +27 n) -8 o) -8 p) +37 q) +5 r) -15 s) -1 t) +10 u) +14

03. *a)* $-\frac{1}{10}$ *b)* $\frac{49}{12}$ *c)* $-\frac{28}{45}$ *d)* $\frac{7}{5}$

04. *a) 1234,68345 b) 91,449 c) 15,252 e) – 0,243*

f) 16,82 g) 0,211 h) 5,1758 j) 8,32

05. *O 13º salário será igual a R$ 301,00.*

06. *Não sobrará dinheiro para João Carlos, pois sua despesa será R$ 13,00 maior que seu salário.*

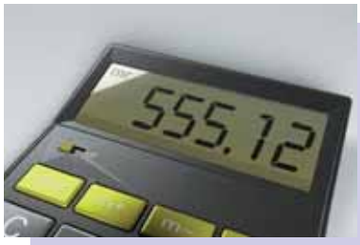
NÚMEROS QUEBRADOS: OS DECIMAIS

TEMAS

1. Representação dos números decimais
2. Da escrita fracionária para a escrita decimal

Introdução

Os números com vírgula indicam quantidades ou medidas “quebradas” (que não podem ser representadas apenas por números inteiros). Esses números aparecem nas manchetes de jornal, nos preços e nas embalagens dos produtos que são consumidos, no visor de aparelhos eletrônicos, como calculadoras, computadores e balanças, e no painel de eletrodomésticos e de automóveis, em geral.



© Megastocker/123RF


© Valentin Oleynikov/123RF



© João Prudente/Pulsar Imagens

Embora os números com vírgula possam ser vistos em diversos lugares, há muito que aprender a respeito deles, sobre como efetuar cálculos com eles e como usá-los em uma calculadora.

O objetivo desta Unidade é discutir, explicitar e organizar seus conhecimentos sobre os números decimais, aprofundando-os.

TEMA 1 Representação dos números decimais

Neste Tema, você aprenderá a ler, interpretar e representar números decimais, vai saber onde se deve colocar a vírgula e qual é o seu significado.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

De todos os tipos de número que você usa em seu dia a dia e em suas atividades profissionais, os números com vírgula são os mais comuns, pois podem ser utilizados em variados contextos.

• Tente lembrar quais são as situações do cotidiano em que você usa a vírgula em números.

• Agora, imagine como seria a leitura de um jornal sem saber o que significam os números com vírgula.

A importância dos números decimais na nossa vida

Na maioria das situações do cotidiano, principalmente aquelas relacionadas a medidas e dinheiro, nem sempre os números envolvidos são naturais. Por exemplo:

• é muito difícil que uma pessoa meça exatamente 1 m ou 2 m. O mais provável é que a altura de uma pessoa de estatura média seja maior que 1 m e menor que 2 m. Se ela mede 1 m e 68 cm, não é usual expressar essa altura em centímetros, ou seja, 168 cm; o mais comum, na verdade, é usar uma vírgula e expressá-la como 1,68 m;

• quando se vai comprar um frango inteiro no supermercado, dificilmente seu "peso" será 2 kg ou 3 kg exatos; porém, se ele pesar 2 kg e 325 g, é improvável que apareça na embalagem a informação do peso em gramas, 2.325 g, pois a unidade grama somente costuma ser utilizada para expressar massas menores que 1 kg.





Fotos: © Paulo Savala

VOCÊ SABIA?

Em alguns países, os números decimais são escritos de forma diferente.

Existem dois tipos de códigos para separar a parte inteira da parte decimal nas calculadoras: o ponto ou a vírgula. Em muitas calculadoras importadas, utiliza-se o ponto, isto é, o ponto decimal; em outras, usa-se a vírgula. No Brasil, por exemplo, utiliza-se a vírgula.



© R2 Editorial

Como escrever essas medidas?

Essa questão ocupou muitos matemáticos durante vários séculos, até que, enfim, surgiu a ideia de usar a vírgula para separar a parte inteira de outra "quebrada".

No século IX, o astrônomo e matemático árabe Al Kasi desenvolveu uma teoria sobre as frações decimais e a noção de número decimal. Mas foi somente depois de cerca de sete séculos que a vírgula, da forma que é usada hoje, foi utilizada pela primeira vez.

Os números com vírgula presentes nas embalagens, nas ofertas e nas manchetes do dia a dia estão associados a uma fração decimal correspondente e são chamados **números decimais**.

A notação decimal é uma das maneiras de representar as frações que podem ser escritas com denominadores 10, 100, 1.000... isto é, as frações decimais.

Notação fracionária	Notação decimal	Leitura
$\frac{1}{10}$	0,1	Um décimo
$\frac{1}{100}$	0,01	Um centésimo
$\frac{1}{1.000}$	0,001	Um milésimo

Nos casos a seguir, observe algumas frações com denominadores 10 e 100 e o número de dígitos escritos depois da vírgula.

- $\frac{2}{10} = 0,2$
- $\frac{13}{100} = 0,13$
- $\frac{13}{10} = 1,3$
- $\frac{24}{100} = 0,24$
- $\frac{17}{10} = 1,7$
- $\frac{237}{100} = 2,37$

Na notação decimal, a vírgula separa a escrita do número em duas partes: a parte inteira e a parte fracionária ou decimal.

Veja outros exemplos:

$3{,}7 = 3 + 0{,}7 = 3 + \frac{7}{10}$ Lê-se: “três inteiros e sete décimos”.

Parte inteira — Parte fracionária ou decimal

$0{,}05 = 0 + 0{,}05 = 0 + \frac{5}{100}$ Lê-se: “cinco centésimos”.

Parte inteira — Parte fracionária ou decimal

$4{,}318 = 4 + 0{,}318 = 4 + \frac{318}{1.000}$ Lê-se: “quatro inteiros e trezentos e dezoito milésimos”.

Parte inteira — Parte fracionária ou decimal

$721{,}125 = 721 + 0{,}125 = 721 + \frac{125}{1.000}$ Lê-se: “setecentos e vinte e um inteiros e cento e vinte e cinco milésimos”.

Parte inteira — Parte fracionária ou decimal

ATIVIDADE 1 Notação fracionária

Nesta atividade, você vai pôr em prática o que aprendeu e avaliar se deve retomar e se aprofundar um pouco mais no tema. Então, mãos à obra.

1 Escreva a fração decimal e como se lê.

a) 0,3 _____

b) 0,03 _____

c) 0,003 _____

d) 0,5 _____

e) 0,35 _____

f) 0,035 _____

g) 0,14 _____

h) 0,4 _____

DESAFIO

A representação decimal da fração $\frac{5}{2}$ é:

a) 5,2 **b)** 5,0 **c)** 2,5 **d)** 2,0

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matem%C3%A1tica/6%C2%AA%20s%C3%A9rie%20EF/1_Manh%C3%A3/Prova-MAT-6EF-Manha.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Notação fracionária

1

a) $\frac{3}{10}$ → três décimos.

b) $\frac{3}{100}$ → três centésimos.

c) $\frac{3}{1.000}$ → três milésimos.

d) $\frac{5}{10}$ → cinco décimos.

e) $\frac{35}{100}$ → trinta e cinco centésimos.

f) $\frac{35}{1.000}$ → trinta e cinco milésimos.

g) $\frac{14}{100}$ → catorze centésimos.

h) $\frac{4}{10}$ → quatro décimos.

Desafio

Alternativa correta: **c**. O melhor modo de se obter o número decimal correspondente a uma fração é encontrar, primeiro, a fração decimal. Como a fração decimal precisa ter denominador 10, o cálculo pode ser feito como no exemplo ao lado.

$$\frac{5}{2} \overset{\times 5}{=} \frac{25}{10} = 2{,}5$$

Registro de dúvidas e comentários

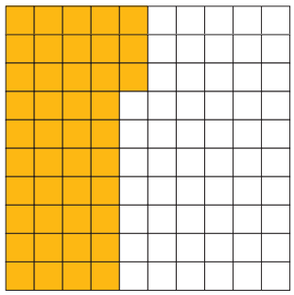
Neste Tema, você verá como é possível representar uma fração na forma decimal e também aprenderá a continuar a divisão quando o resultado não for exato.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

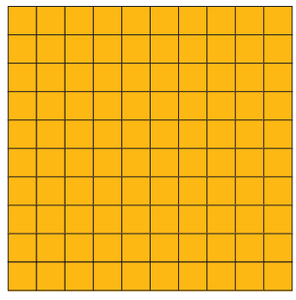
A escrita decimal está presente em sua vida, no seu dia a dia. Mesmo que você não perceba, quando divide uma garrafa de 1 ℓ de refrigerante em copos que têm capacidade de 250 mℓ, o que acha que está fazendo?

Isso mesmo, você está "fracionando" o líquido da garrafa, ou seja, dividindo 1 ℓ em quatro copos de 250 mℓ, ou colocando 0,250 ℓ de refrigerante em cada um.

Escrita decimal e fracionária

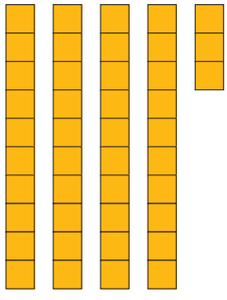


A parte pintada da placa ao lado representa a fração decimal $\frac{43}{100}$, cuja forma decimal é 0,43.

Observe que a barra  equivale a $\frac{1}{10}$ da placa. 

Ilustrações: © R2 Editorial

A barra equivale à décima parte da placa.



Quatro barras e três cubinhos, lê-se: "quarenta e três centésimos", que é igual a "quatro décimos e três centésimos".

Resumindo, $\frac{43}{100} = \frac{40}{100} + \frac{3}{100}$, mas $\frac{40}{100} = \frac{4}{10}$.

Portanto, $\frac{43}{100} = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} = 0{,}4 + 0{,}03 = 0{,}43$.

Veja outros exemplos a seguir. O que você percebe?

Escrita fracionária	Escrita decimal
$\frac{32}{10}$	3,2
$\frac{32}{100}$	0,32
$\frac{325}{10}$	32,5
$\frac{325}{100}$	3,25
$\frac{325}{1.000}$	0,325

ATIVIDADE 1 Escrita decimal e escrita fracionária

1 Escreva na forma decimal:

a) $\frac{8}{10} =$ _____

b) $\frac{8}{100} =$ _____

c) $\frac{43}{10} =$ _____

d) $\frac{43}{100} =$ _____

e) $\frac{815}{10} =$ _____

f) $\frac{815}{100} =$ _____

g) $\frac{815}{1.000} =$ _____

h) $\frac{815}{10.000} =$ _____

2 Escreva na forma de fração decimal:

a) 0,6 = _____

b) 0,60 = _____

c) 0,04 = _____

d) 0,64 = _____

e) 0,70 = _____

f) 0,005 = _____

g) 6,43 = _____

h) 64,3 = _____

i) 0,643 = _____

j) 0,045 = _____

VOCÊ SABIA?

As moedas de 1 centavo de real não são produzidas desde 2004.
Os motivos alegados para interromper a cunhagem dessas moedas foram o alto custo de sua emissão e a baixa circulação. Todas as cédulas e moedas em reais são produzidas pela Casa da Moeda do Brasil, empresa pública vinculada ao Ministério da Fazenda. As moedas de 1 centavo de real foram lançadas em 1994, com o Plano Real.

3 Pratique a leitura e a escrita de números decimais escrevendo a forma decimal de:

a) dois inteiros e quatro décimos: _____

b) quarenta e dois inteiros e quinze centésimos: _____

c) cento e onze milésimos: _____

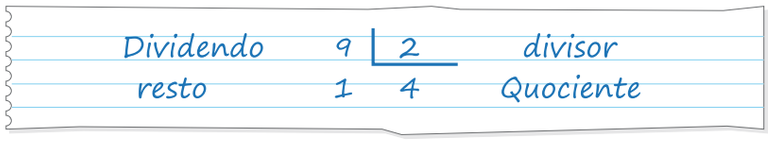
d) onze milésimos: _____

e) dez milésimos: _____

f) um milésimo: _____

Os decimais e a divisão

Você se lembra dos procedimentos de divisão de dois números inteiros?



Quando você estudou a técnica da divisão na chave, aprendeu a parar a divisão quando o resto era menor que o divisor.



Ilustrações: © R2 Editorial

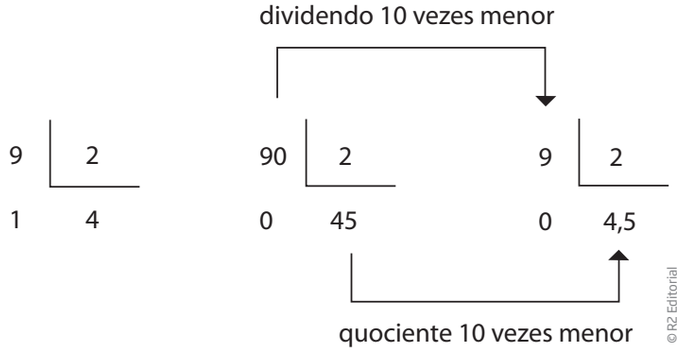
Mas, com a invenção das frações e dos números decimais, é possível continuar a divisão.

Nas situações do dia a dia, não há a menor dificuldade em fazer certas divisões, como dividir 9 pães para duas pessoas. Nesses casos, não é preciso usar “vírgulas”. No caso da divisão dos pães, por exemplo, cada pessoa fica com 4 pães, e o pão restante é dividido ao meio, então cada pessoa passa a ter 4 pães e 1 metade. Contudo, quando for preciso representar o resultado dessa divisão, a vírgula é necessária.



Montagem sobre foto © Jacek/Kino

Veja o exemplo a seguir e uma das possíveis estratégias utilizadas para dividir dois números até que o resto seja zero e seja possível representar o resultado final.



© R2 Editorial

A estratégia adotada aqui foi fazer outra divisão (90 ÷ 2) com um dividendo 10 vezes maior (90) que o original (9), o que resultou em um quociente 10 vezes maior (45) que o da operação original (4,5).

Para compensar, então, divide-se por 10 o quociente da conta intermediária. Na conta apresentada anteriormente, era preciso dividir 9 por 2, mas calculou-se 90 por 2, a fim de que pudesse ser uma divisão exata.

Logo, o resultado foi 45, um quociente que é 10 vezes maior que o da conta original. Portanto, para encontrar o resultado da divisão 9 ÷ 2, dividiu-se 45 por 10, o que se faz facilmente recolocando a vírgula uma casa à esquerda, obtendo-se **4,5**.

ATIVIDADE 2 Mais cálculo mental

1 Pratique o que aprendeu até agora resolvendo mentalmente as seguintes divisões:

a) 100 ÷ 4 = _____

b) 100 ÷ 8 = _____

c) 10 ÷ 4 = _____

d) 10 ÷ 8 = _____

e) 1 ÷ 4 = _____

f) 1 ÷ 8 = _____

g) 3 ÷ 4 = _____

h) 13 ÷ 2 = _____

i) 50 ÷ 2 = _____

j) 14 ÷ 4 = _____

k) 5 ÷ 2 = _____

l) 60 ÷ 8 = _____

m) 1.000 ÷ 8 = _____

n) 21 ÷ 4 = _____

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Escrita decimal e escrita fracionária

1

a) 0,8
b) 0,08
c) 4,3
d) 0,43
e) 81,5
f) 8,15
g) 0,815
h) 0,0815

2

a) $\frac{6}{10}$
b) $\frac{60}{100} = \frac{6}{10}$
c) $\frac{4}{100}$
d) $\frac{64}{100}$
e) $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$
f) $\frac{5}{1.000}$
g) $\frac{643}{100}$
h) $\frac{643}{10}$
i) $\frac{643}{1.000}$
j) $\frac{45}{1.000}$

3

a) 2,4
b) 42,15
c) 0,111
d) 0,011
e) 0,010
f) 0,001

Atividade 2 - Mais cálculo mental

1

a) 25

b) Sabendo que 100 ÷ 4 = 25, ao calcular 100 ÷ 8 é só dividir o resultado por 2 → 25 ÷ 2 = 12,5.

HORA DA CHECAGEM

c) Neste caso, é só dividir o resultado de 100 ÷ 4 por 10 para obter 10 ÷ 4 = 2,5.

d) Basta dividir o resultado de 100 ÷ 8 por 10 para obter 10 ÷ 8 = 1,25.

e) Pensando do mesmo modo que no item c, tem-se 1 ÷ 4 = 0,25.

f) 0,125

g) 0,75

h) 6,5

i) 25

j) 3,5

k) 2,5

l) 7,5

m) 125

n) 5,25



Registro de dúvidas e comentários

PROPORCIONALIDADE

TEMAS

1. Comparação proporcional
2. Conceito e usos de razões

Introdução

No dia a dia, na vida e nas atividades profissionais, muitas vezes surgem situações que exigem a realização de cálculos antes de tomar uma decisão. Esta Unidade dedica-se ao estudo das relações proporcionais que existem nessas situações de tomada de decisão, em que você precisa saber qual produto é mais econômico, qual é a quantidade de votos necessária para se vencer uma eleição em uma associação de bairro, qual é o valor que um trabalhador deve receber pelas horas extras trabalhadas, como ampliar a receita de um bolo etc. Muitas situações serão vistas nesta Unidade, de forma a trabalhar o pensamento proporcional utilizando os temas como instrumento para esse aprofundamento.

Comparação proporcional TEMA 1

Ao estudar este Tema, você terá a oportunidade de ampliar seu conhecimento a respeito da proporcionalidade, ou seja, sobre a comparação entre valores diferentes e seus múltiplos.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

O raciocínio proporcional está presente em situações do dia a dia, a saber: quando você vai tomar um café, se colocar uma medida dupla do líquido, provavelmente precisará dobrar também a quantidade de açúcar, para que o cafezinho não fique amargo.

Se um pedreiro, ao preparar o reboque para revestir uma parede, dobrar a quantidade de água, mas não a de cimento e areia, o que acha que acontecerá?

E se, ao fazer um arroz, a quantidade de grãos for aumentada, mas não a de água e tempero, será que o gosto será o mesmo?

Proporcionalidade e seus desmembramentos

Cláudio é eletricista. Ele foi chamado para fazer a instalação elétrica de um conjunto de cinco casas iguais: com dois quartos, sala, cozinha e banheiro. Há um ano, ele fez uma instalação para a mesma pessoa, em duas casas iguais a essas e usou 645 metros de fiação. Ele sabe que, na loja Da-nó-em-tudo, o rolo inteiro do fio (250 metros) é vendido com 15% de desconto, em relação ao custo do metro avulso, que é de R$ 2,50. A princípio, ele precisa calcular quantos metros de fiação usará nas cinco casas. Seria muito bom se conseguisse obter o menor custo possível nessa loja.

Essa é uma questão que envolve o conhecimento de razão, proporção e porcentagem, como muitas questões que são enfrentadas no trabalho, em casa ou na comunidade. Trata-se de um cálculo que não é muito fácil de fazer.

Você sabe como ajudar o Cláudio? Que tal se preparar para enfrentar esse cálculo?

Em primeiro lugar, comece por outra situação, bem mais simples: a de ofertas de produtos no supermercado. Muitas vezes, você pode ficar inseguro para decidir qual é a melhor oferta, como no caso das margarinas apresentadas nas imagens ao lado. Nesse caso, é mais vantajoso comprar qual das margarinas?

Para saber qual é a embalagem mais econômica, a simples comparação entre preços não resolve, pois a quantidade de margarina em cada embalagem é diferente uma da outra. Uma estratégia de solução é calcular o custo de meio quilo de cada tipo de margarina. Faça isso e aponte a melhor escolha.



Pote de 250 g:
R$ 2,75



Pote de 500 g:
R$ 5,40

Fotos: © Paulo Savala

Acompanhe, agora, outra situação.



Considerando o preço unitário da lata de molho de tomate de cada oferta, pode parecer que o preço do Mercado da Praça é o melhor:

- Preço de 1 lata de molho de tomate:

Mercado Girassol: R$ 2,50.

Mercado da Praça: R$ 12,00 ÷ 6 = R$ 2,00.

Mas, se for preciso comprar 6 latas de molho, a oferta do Mercado Girassol é mais vantajosa:

- Preço de 6 latas de molho de tomate:

Mercado Girassol: R$ 2,50 × 4 = R$ 10,00.

Mercado da Praça: R$ 12,00.

O raciocínio proporcional é importante para a tomada de decisões: se você pensar na compra de 1 ou 2 latas de molho de tomate, é tentado a comprar do Mercado da Praça, onde o valor unitário é menor que o do Mercado Girassol. Mas, quando você leva em conta a oferta "leve 3, pague 2", então a compra no Mercado Girassol é mais vantajosa.

Local	Preço de 3 latas de molho de tomate	Preço de 6 latas de molho de tomate
Mercado Girassol	2 × R$ 2,50 = R$ 5,00	4 × R$ 2,50 = R$ 10,00
Mercado da Praça	R$ 12,00 ÷ 2 = R$ 6,00	6 × R$ 2,00 = R$ 12,00

Proporcionalidade na comparação

Imagine a situação de um trabalhador, o Pedro, que tem um negócio de venda de suco de laranja no terminal de transportes de sua cidade. Ele vai à feira e estuda os preços em cada barraca de frutas.

Veja as ofertas de cada barraca e decida qual é a compra mais vantajosa.



Barraca do Antônio

5 dúzias de laranja
R$ 12,00



Barraca do Bernardo

4 dúzias de laranja
R$ 10,00



Barraca do Carlos

10 dúzias de laranja
R$ 20,00

Fotos: © Paulo Savala

O preço de cada dúzia de laranjas na barraca:

- do Antônio é: R$ 2,40 (12,00 ÷ 5);
- do Bernardo é: R$ 2,50 (10,00 ÷ 4);
- do Carlos é: R$ 2,00 (20,00 ÷ 10).

Conclusão: é melhor comprar as dúzias de laranjas na barraca do Carlos. Isso se você só for considerar o preço.

Contudo, a aplicação da Matemática a situações profissionais como a dos feirantes não se restringe apenas a encontrar um valor mais em conta; veja o caso do Mauro, que também é feirante.

Ele é dono de uma das barracas de frutas que fica aberta todos os dias. Ela é sempre abastecida com uma pequena quantidade de kiwi, porque ele tem 3 fregueses que vão à barraca com frequência: Paulinha, Dona Dulce e Seu Felipe. Paulinha vem a cada 10 dias; Dona Dulce, a cada 6 dias; e Seu Felipe, a cada 4 dias. A dificuldade é que, quando coincide de os três comparecerem juntos, como aconteceu

hoje, sempre falta kiwi para um deles. Como Antônio pode prever a próxima vez em que seus fregueses virão no mesmo dia?

Para discutir essa questão, é preciso introduzir uma ideia matemática importante para a solução do problema: o conceito de múltiplo comum.

Múltiplos e mínimo múltiplo comum

Para cada número natural, podem-se associar outros números que são denominados **múltiplos** desse número.

A ideia de múltiplo está relacionada à multiplicação, como nas tabuadas; por exemplo, o número 7 tem como múltiplos os números 14, 21, 28 e 35, entre outros, porque podem ser obtidos pela multiplicação de 7 por um número natural:

$7 = 7 \times 1$

$14 = 7 \times 2$

$21 = 7 \times 3$

$28 = 7 \times 4$

$35 = 7 \times 5$

Se **n** é um número natural, qualquer número do tipo $7 \times n$ é um múltiplo de 7.

O número 7 tem infinitos múltiplos. Chamando o conjunto dos múltiplos de 7 de M(7), tem-se:

M(7) = {0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, ..., 700, 707, 714, ...}

O número 0 (zero) é múltiplo de 7, porque pode ser obtido multiplicando-se 7 por um número natural, no caso pelo próprio zero, que é o primeiro número natural: $0 = 7 \times 0$.

Verifique se o zero é múltiplo de outros números naturais: 1, 2, 3, ..., 12, ..., 2.000.

O zero é múltiplo de todos os números naturais. O contrário não é verdade, ou seja, todos os números naturais não são múltiplos de zero, pois zero vezes um número qualquer é sempre zero.

Verifique se há outros números naturais que são múltiplos de si mesmos.

O número 7 é múltiplo de 7, pois $7 = 7 \times 1$.

Todo número natural é múltiplo de si mesmo.

Considere, agora, o conjunto dos múltiplos de 3:

M(3) = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, ...}

Compare os múltiplos de 3 e de 7, observe que há números que são múltiplos comuns de 3 e de 7, ou seja, são múltiplos tanto de um como de outro. Esse é o caso do 0, do 21, do 42, do 63 e assim por diante.

Múltiplos comuns de 3 e 7:

MC(3, 7) = {0, 21, 42, 63, 84, 105, ...}

Como o zero é múltiplo de qualquer número natural, os matemáticos se interessaram pelo mínimo múltiplo comum (MMC) de dois ou mais números que fosse diferente de zero.

Quando é preciso determinar o MMC de dois ou mais números, não se considera o zero.

O menor múltiplo comum de 3 e 7 é 21:

MMC(3, 7) = 21

Veja as relações possíveis entre 3, 7 e 21:

- 21 é múltiplo de 3;
- 21 é múltiplo de 7;
- 21 é divisível por 3 → 3 é divisor de 21;
- 21 é divisível por 7 → 7 é divisor de 21.

Quando um número **a** é múltiplo de um número **b**, diz-se que **a** é divisível por **b**.

Sejam dois números naturais **a** e **b**. Se n = a × b, então **n** é múltiplo de **a** e de **b**; **a** e **b** são divisores de **n**.

ATIVIDADE 1 Múltiplos comuns e mínimo múltiplo comum

Com base nos elementos do conjunto dos múltiplos de 2, 3, 5 e 7, faça os exercícios 1 a 6 a seguir.

M(2) = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...}

M(3) = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...}

M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...}

M(7) = {0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, ...}

1 Determine:

a) Os seis primeiros múltiplos comuns de 2 e 3.

MC(2, 3) = {_____, _____, _____, _____, _____, _____, ...}

b) O mínimo múltiplo comum de 2 e 3.

MMC(2, 3) = _____

2 Determine:

a) Os seis primeiros múltiplos comuns de 2 e 5.

MC(2, 5) = {_____, _____, _____, _____, _____, _____, ...}

b) O mínimo múltiplo comum de 2 e 5.

MMC(2, 5) = _____

3 Determine:

a) Os seis primeiros múltiplos comuns de 2 e 7.

MC(2, 7) = {_____, _____, _____, _____, _____, _____, ...}

b) O mínimo múltiplo comum de 2 e 7.

MMC(2, 7) = _____

4 Determine:

a) Os seis primeiros múltiplos comuns de 3 e 5.

MC(3, 5) = {_____, _____, _____, _____, _____, _____, ...}

b) O mínimo múltiplo comum de 3 e 5.

MMC(3, 5) = _____

5 Determine:

a) Os seis primeiros múltiplos comuns de 5 e 7.

MC(5, 7) = {_____, _____, _____, _____, _____, _____, ...}

b) O mínimo múltiplo comum de 5 e 7.

MMC(5, 7) = _____

6 Determine o MMC nos itens a seguir:

a) MMC(2, 3, 5) = _____

b) MMC(2, 3, 7) = _____

c) MMC(3, 5, 7) = _____

d) MMC(3, 6) = _____

e) MMC(15, 30) = _____

f) MMC(15, 20) = _____

g) MMC(14, 21) = _____

h) MMC(12, 18) = _____

7 Encontre um múltiplo comum de 7 e 8.

MC(7, 8) = _____

8 Determine o MMC dos itens a seguir:

a) MMC(4, 6) = _____

b) MMC(4, 10) = _____

c) MMC(6, 10) = _____

d) MMC(4, 6, 10) = _____

De volta às barracas de frutas...

Um dos problemas propostos no texto *Proporcionalidade na comparação* era o de Mauro, que precisava prever o próximo dia em que coincidiria a vinda de Paulinha, Dona Dulce e Seu Felipe à sua barraca.

Como Paulinha vai à barraca a cada 10 dias, dona Dulce, a cada 6 dias, e seu Felipe, a cada 4 dias, então, considerando que todos tenham vindo hoje, a próxima vez que Paulinha irá comprar kiwi será daqui a 10 dias, depois daqui a 20 dias, daí daqui a 30 dias..., sempre em períodos múltiplos de 10. Dona Dulce irá daqui a 6 dias, depois daqui a 12 dias..., em períodos múltiplos de 6. E Seu Felipe irá daqui a 4 dias, 8 dias, 12 dias..., enfim, períodos múltiplos de 4.

O número de dias que vão passar até coincidir novamente a ida dos três à barraca do Mauro terá de ser um múltiplo comum de 10, 6 e 4, e o MMC desses números indicará a próxima vez em que comparecerão no mesmo dia. Então, deve-se usar o que foi estudado sobre múltiplos comuns para encontrar a solução do problema proposto.

Cálculo do MMC de 10, 6 e 4:

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 2 \times 5 \\ 6 = 2 \times 3 \\ 4 = 2 \times 2 \end{array}\right\} \text{MMC}(10, 6, 4) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$$

Veja que 60 é o menor número natural não nulo que pode ser dividido simultaneamente por 10, 6 e 4.

$60 = 10 \times 6$

$60 = 6 \times 10$

$60 = 4 \times 15$

Então, será daqui a 60 dias que coincidirá a vinda de Paulinha, dona Dulce e seu Felipe à barraca de Mauro.

ATIVIDADE 2 Fazendo economia

Leia as informações a seguir para responder às questões propostas.

© R2 Editorial



1 Com base nos valores da dúzia de laranja de cada barraca da feira, assinale as seguintes afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) Com o dinheiro que se usa para comprar 16 dúzias de laranja na barraca do Bernardo dá para comprar 20 dúzias de laranja na barraca do Carlos. (_____)

b) Com o dinheiro que se usa para comprar 6 dúzias de laranja na barraca do Antônio dá para comprar 15 dúzias de laranja na barraca do Carlos. (_____)

2 Com base nos valores das dúzias apresentados, responda:

a) Com R$ 24,00, quantas dúzias de laranja dá para comprar na barraca do Antônio?

b) Com R$ 20,00, quantas dúzias de laranja dá para comprar na barraca do Bernardo?

c) Suponha que as laranjas da barraca do Carlos acabaram. Em qual das outras barracas é mais econômico comprar?

d) Nessa semana, um novo feirante, seu Daniel, entrou na disputa pela concorrência. Ele vende 15 dúzias de laranja por R$ 35,00. Dos quatro feirantes, quem vende dúzias de laranja mais barato?

e) Pedro economizaria ou gastaria mais se, em vez de comprar as 60 dúzias de laranja na barraca do Carlos, comprasse na barraca do seu Daniel? De quanto seria a diferença?

DESAFIO

Numa caixa de adubo, a tabela ao lado indica as quantidades adequadas para o seu preparo. De acordo com esta tabela, a quantidade de adubo que se deve misturar em 2 litros de água é:

Adubo	Água
30 g	0,2 ℓ
150 g	1 ℓ
1.500 g	10 ℓ
3.000 g	20 ℓ

a) 3.000 g **b)** 300 g **c)** 150 g **d)** 30 g

Saresp 2005. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2005/Arquivos/Provas_EF_2005/7%C2%BOs%C3%A9rie%20EF%20tarde.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Múltiplos comuns e mínimo múltiplo comum

1 M(2) = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}
M(3) = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...}
a) MC(2, 3) = {0, 6, 12, 18, 24, 30, ...}
b) MMC(2, 3) = 6

2 M(2) = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...}
M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...}
a) MC(2, 5) = {0, 10, 20, 30, 40, 50, ...}
b) MMC(2, 5) = 10

3 M(2) = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...}
M(7) = {0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, ...}
a) MC(2, 7) = {0, 14, 28, 42, 56, 70, ...}
b) MMC(2, 7) = 14

4 M(3) = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...}
M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...}
a) MC(3, 5) = {0, 15, 30, 45, 60, 75, ...}
b) MMC(3, 5) = 15

5 M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...}
M(7) = {0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, ...}
a) MC(5, 7) = {0, 35, 70, 105, 140, 175, ...}
b) MMC(5, 7) = 35

6

a) MMC(2, 3, 5) = 30 **c)** MMC(3, 5, 7) = 105 **e)** MMC(15, 30) = 30 **g)** MMC(14, 21) = 42
b) MMC(2, 3, 7) = 42 **d)** MMC(3, 6) = 6 **f)** MMC(15, 20) = 60 **h)** MMC(12, 18) = 36

7 MMC(7, 8) = 56. Outros múltiplos comuns: 112, 224, ...

8

a) MMC(4, 6) = 12 **b)** MMC(4, 10) = 20 **c)** MMC(6, 10) = 30 **d)** MMC(4, 6, 10) = 60

HORA DA CHECAGEM

Atividade 2 - Fazendo economia

1

a) (V)

16 dúzias na barraca do Bernardo: 4 dúzias custam R$ 10,00 e 16 = 4 × 4, então 16 dúzias custam 4 × R$ 10,00 = R$ 40,00.

20 dúzias na barraca do Carlos: 10 dúzias custam R$ 20,00 e 20 = 2 × 10, então 20 dúzias custam 2 × R$ 20,00 = R$ 40,00.

b) (F)

6 dúzias na barraca do Antônio: 5 dúzias custam R$ 12,00 e 6 = 5 + 1 = 5 + $\frac{1}{5}$ de 5, então 6 dúzias custam R$ 12,00 + $\frac{1}{5}$ de R$ 12,00, que é igual a R$ 12,00 + R$ 2,40 = R$ 14,40.

15 dúzias na barraca do Carlos: 10 dúzias custam R$ 20,00 e 15 = 10 + $\frac{1}{2}$ de 10, então 15 dúzias custam R$ 20,00 + $\frac{1}{2}$ de R$ 20,00, que é igual a R$ 20,00 + R$ 10,00 = R$ 30,00.

2

a) Com R$ 12,00 compram-se 5 dúzias. Como R$ 24,00 é o dobro de R$ 12,00, é possível comprar o dobro de 5 dúzias, que são 10 dúzias.

b) Com R$ 10,00, compram-se 4 dúzias. Com R$ 20,00, que é o dobro de R$ 10,00, é possível comprar o dobro de laranjas, ou seja, 8 dúzias.

c) Cada dúzia de laranja na barraca do Antônio custa R$ 2,40, e na barraca do Bernardo, R$ 2,50. É mais econômico comprar na barraca do Antônio.

d) Na barraca do Antônio, 1 dúzia custa R$ 2,40; na barraca do Bernardo, R$ 2,50; na barraca do Carlos, R$ 2,00; na barraca do seu Daniel, aproximadamente R$ 2,33. Carlos ainda é quem vende mais barato.

e) 60 é igual a 6 × 10. Logo, Pedro gastaria 6 × R$ 20,00 = R$ 120,00 na barraca do Carlos. 60 também é igual a 4 × 15. Logo, Pedro gastaria 4 × R$ 35,00 = R$ 140,00 na barraca do seu Daniel.

Pedro gastaria R$ 20,00 (R$ 140,00 – R$ 120,00 = R$ 20,00) a mais se comprasse com seu Daniel, em vez de comprar com Carlos.

Desafio

Alternativa correta: **b**. Se para 1 ℓ de água são necessários 150 g de adubo, então para 2 ℓ serão necessários: 2 × 150 = 300 g de adubo.



Registro de dúvidas e comentários

Neste Tema, você estudará o conceito de **razão** e onde ela se aplica. Aprenderá ainda outros conceitos como os de **densidade demográfica** e **escala**, que estão relacionados com a proporcionalidade.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Em um estádio de futebol, se existem 20 mil assentos, será que é adequado vender 30 mil ingressos?

Para acomodar bem os torcedores, a razão deve ser de 1 lugar para cada pessoa, sem que haja torcedores em pé.

As razões são utilizadas em diversas situações, como num concurso em que há 5 candidatos para cada 2 vagas.

Razões

Uma Secretaria de Estado abriu concurso para o preenchimento das vagas de determinado cargo. Após o término do prazo de inscrição, verificou-se que havia 8 candidatos por vaga. O que isso significa?

Usando a linguagem matemática, pode-se dizer que a relação de candidatos por vaga está na razão de “8 para 1”.

Entenda melhor a ideia de razão analisando os seguintes exemplos:

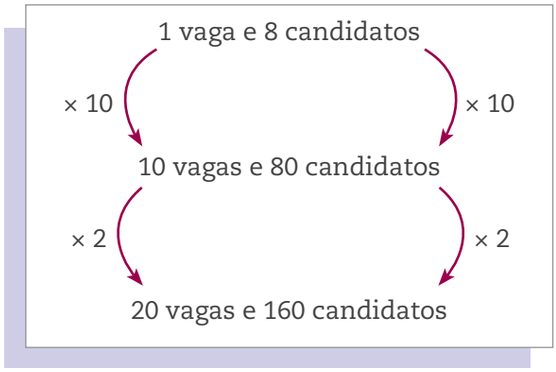
- se houvesse 60 candidatos disputando 30 vagas, a relação seria de “2 candidatos por vaga”;

- se houvesse 40 candidatos disputando 40 vagas, a relação seria de “1 candidato por vaga”.

Agora, veja o cálculo de uma nova situação, supondo que tenham se inscrito 160 candidatos e que cada 8 inscritos disputam 1 vaga. Quantas são as vagas oferecidas?

Para responder à questão de modo mais direto, basta calcular $\frac{160}{8} = 20$.

Pode-se concluir, nesse caso, que há um total de 20 vagas.



ATIVIDADE 1 O uso de razões na matemática

1 A comissão de fábrica de uma empresa tem de ser renovada, pois os mandatos dos representantes estão no fim. A eleição para escolher os membros dessa comissão apontou 10 candidatos para cada cargo na comissão. Sabe-se que 40 trabalhadores disputaram a eleição. Quantos representantes foram eleitos?

2 Houve um concurso para a seleção de professores em uma cidade do interior de São Paulo. Veja o número de candidatos e de vagas por disciplina.

Disciplina	Candidatos	Vagas
Língua Portuguesa	4.200	600
Matemática	4.745	365

Determine a relação candidato-vaga para cada disciplina.

a) Língua Portuguesa.

b) Matemática.

3 Em certa cidade, há 2 médicos para cada grupo de 900 habitantes. Sabendo que a cidade tem 24 médicos, quantos são seus habitantes?

4 Nos exames para o ingresso no curso de Gastronomia, a relação candidato-vaga está expressa pela razão $\frac{11}{2}$. Isso quer dizer que há 11 candidatos para cada 2 vagas. Sabendo que há apenas 30 vagas, quantos são os candidatos?



Conceito e usos de razões

As relações exploradas até aqui (candidatos/vagas, médicos/habitantes, entre outras) envolvem, em sua maioria, um quociente ou a razão entre dois números inteiros. Esse tipo de relação é expresso da seguinte forma: $\frac{a}{b}$ ou **a/b** ou ainda **a** : **b**, em que **a** e **b** são números inteiros e $b \neq 0$.

Muitos conceitos importantes do dia a dia são expressos por razões. Dois deles são os conceitos de densidade demográfica e de escala, ambos utilizados como indicadores para que geógrafos, economistas, engenheiros e outros profissionais possam interpretar informações relacionadas ao espaço e à dinâmica das populações.

É comum ler essa razão como "**a** está para **b**". E, quando se fala de duas razões iguais como $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$, diz-se que "2 está para 3, assim como 4 está para 6" e tem-se uma proporção.

Densidade demográfica

É a razão entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região.

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{\text{nº de habitantes}}{\text{área}}$$

A densidade demográfica de sua cidade

A cidade paulista com a menor população, em 2010, era Borá (SP). Naquele ano, a cidade tinha 805 habitantes e uma superfície de 118,4 km^2, conforme o Censo 2010 do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Disponível em: <http://www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?uf=35&dados=0>. Acesso em: 13 fev. 2014.

$$\frac{805 \text{ habitantes}}{118{,}4 \text{ km}^2} \cong 6{,}8 \text{ hab./km}^2$$

VOCÊ SABIA?

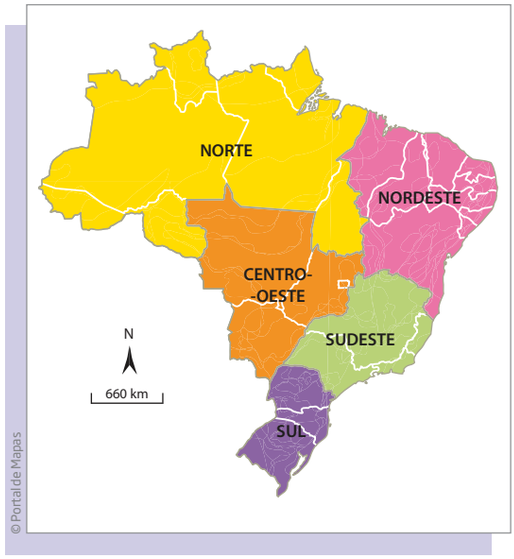
Os símbolos matemáticos são uma forma de linguagem, assim como outros sinais gráficos. O esquema acima mostra um desses sinais: ≅, que significa "aproximadamente igual". Ele é usado quando um número apresenta duas ou mais casas decimais e é arredondado; por exemplo, 7,29 ≅ 7,3.

De acordo com o Censo 2010, a capital do Estado de São Paulo era a cidade mais populosa do Brasil, com seus 11.253.503 habitantes. A superfície da cidade de São Paulo é de 1.523,3 km^2.

$$\text{Densidade demográfica de São Paulo} = \frac{11.253.503 \text{ hab.}}{1.523{,}3 \text{ km}^2} \cong 7.387{,}58 \text{ hab./km}^2$$

Escala

Outra razão importante e de inúmeras aplicações práticas é a **escala**. No estudo de História e Geografia, aprende-se a ler, interpretar e desenhar mapas. Um mapa é uma representação da superfície da Terra, ou de uma parte dela, vista de cima. Nele se pode representar detalhes como as fronteiras, as cidades, o relevo e, até mesmo, as distâncias. Veja um exemplo de mapa a seguir.



Fonte: IBGE. Disponível em: <http://7a12.ibge.gov.br/images/7a12/mapas/Brasil/brasil_grandes_regioes.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

No entanto, é impraticável representar a superfície do Brasil ou mesmo de um bairro em mapa com tamanho natural.

Assim, representações gráficas de objetos ou de regiões são feitas em tamanho reduzido, porém preservando-se as relações entre as medidas de comprimento, ou seja, a proporcionalidade entre elas.

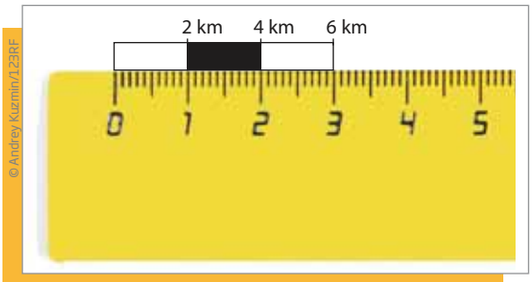
A razão entre o comprimento no desenho e o comprimento real expressa na mesma unidade é chamada escala.

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimento do desenho}}{\text{comprimento real}}$$

A escala de um mapa, planta ou desenho pode ser expressa nas formas gráfica ou numérica:

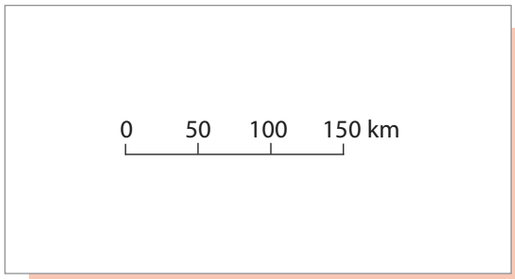
• Na forma **gráfica**, utiliza-se um segmento de reta graduado, sobre o qual se indica, de modo direto, a relação entre as distâncias. No mapa apresentado anteriormente, por exemplo, o segmento de reta mede 1 cm. Assim, cada centímetro no papel corresponde a 660 km no real, como está indicado na escala.

Veja outros exemplos:



© Andrey Kuzmin/123RF

Nesta escala, cada centímetro no desenho corresponde a 2 km no real.



Nesta outra escala, cada centímetro no papel corresponde a 50 km no real.

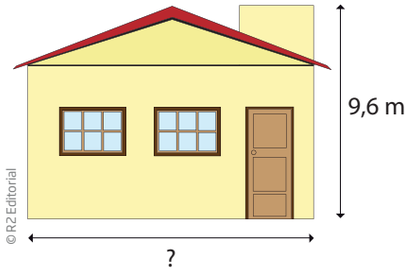
• Na forma **numérica**, as distâncias são sempre dadas em centímetros (cm) e utiliza-se uma razão que pode ser expressa com o uso de dois-pontos ou pela forma fracionária. Voltando ao mapa, qual seria sua escala numérica? Como 1 km = 100.000 cm, tem-se que 660 km = 66.000.000 cm. Logo, a escala numérica do mapa pode ser representada como 1 : 66.000.000 ou $\frac{1}{66.000.000}$.

Nos dois tipos de escala, o que se comunica é que cada centímetro do desenho corresponde a 660 km ou 66.000.000 cm no real.

Explore a escala com base em duas situações-problema e os respectivos modelos de resolução apresentados a seguir.

Situação 1: Escala de um desenho

No desenho a seguir, a casa mede 3 cm de altura. Qual seria o comprimento real da casa?



© R2 Editorial

$$\text{Escala} = \frac{\text{altura do desenho}}{\text{altura real}}$$

9,6 m = 9,6 × 100 cm = 960 cm

$$\text{Escala} = \frac{3 \text{ cm}}{960 \text{ cm}} = \frac{1}{320} \longrightarrow 1 : 320$$

O comprimento da casa no desenho mede 4 cm.

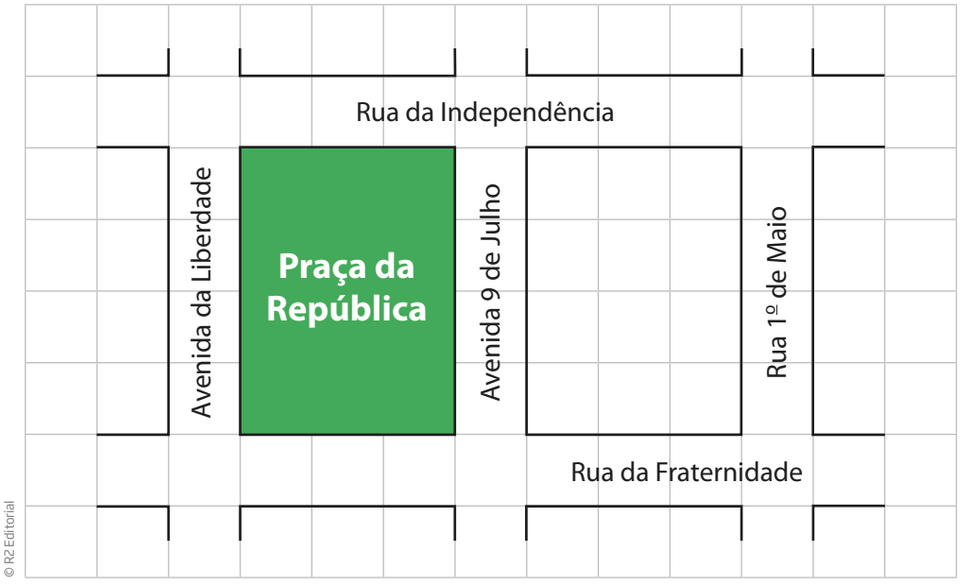
$$\frac{\text{comprimento do desenho}}{\text{comprimento real}} = \frac{1}{320} = \frac{4 \text{ cm}}{\text{comprimento real}}$$

Aqui se tem uma igualdade entre duas razões, que é chamada de **proporção**.

Se 1 cm do desenho corresponde a 320 cm no real, 4 cm correspondem a 4 × 320 = 1.280 cm, que, por sua vez, equivale a 12,8 m. Este deve ser o comprimento real da casa.

Situação 2: Escala de um mapa

O desenho a seguir é o esboço do traçado de parte de um bairro, em que o retângulo verde representa uma praça. Determine as medidas da praça, sabendo que a escala do desenho é 1 : 3.000.



© R2 Editorial

O quadriculado sobre o qual foi traçado o mapa das ruas tem 1 cm de lado.

Se 1 cm no desenho corresponde a 3.000 cm de medida real, pois a escala é 1 : 3.000, então 4 cm no desenho correspondem a 4 × 3.000 cm de medida real, o que é igual a 12.000 cm ou 120 m.

Nas séries iniciais, o sinal × é usado para indicar uma multiplicação, mas, dependendo do contexto e do nível de ensino, são usados outros símbolos. Observe que, em algumas calculadoras, o asterisco (*) é o símbolo para o sinal de multiplicação. Outro símbolo utilizado para essa operação é o ponto (·). Esta modificação será utilizada efetivamente, neste Programa, a partir do Caderno do Estudante – Volume 3. Fique atento que o **x** também pode indicar uma incógnita, ou seja, um valor que se quer encontrar, como no exemplo a seguir.

$$\text{escala} = \frac{\text{medida no desenho}}{\text{medida real}} = \frac{1}{3.000} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{1}{3.000}$$

$$x = 4 \times 3.000 \rightarrow 12.000 \text{ cm} = 120 \text{ m}$$

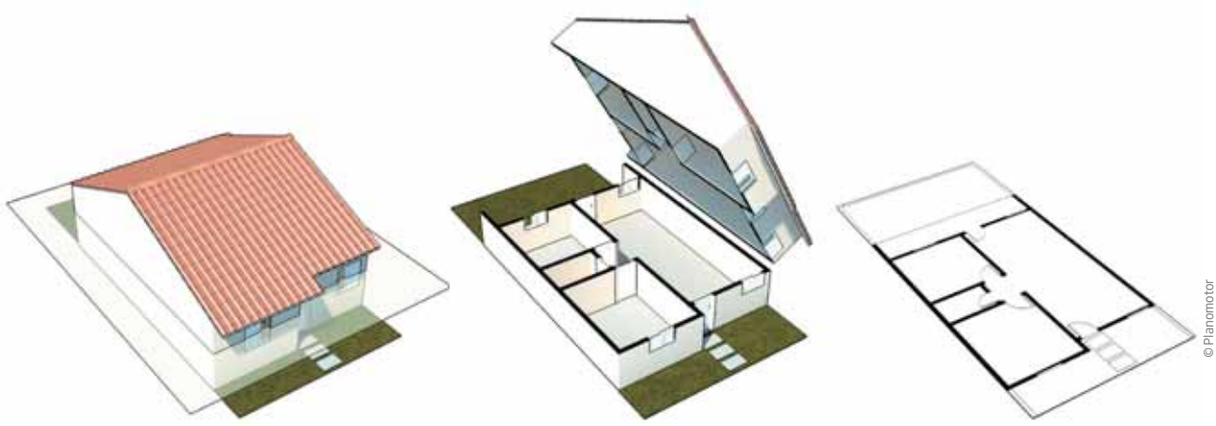
© R2 Editorial

A lateral da praça ladeada pela Rua da Fraternidade tem 3 cm no desenho, então a medida real é 3 × 3.000 = 9.000 cm = 90 m.

Portanto, as dimensões reais da praça são: 120 m por 90 m.

Planta baixa

Outra importante aplicação da ideia de escala está na elaboração e na leitura de **plantas baixas**. Muitos profissionais, como arquitetos, engenheiros, técnicos em edificações, pedreiros etc., trabalham com plantas baixas.



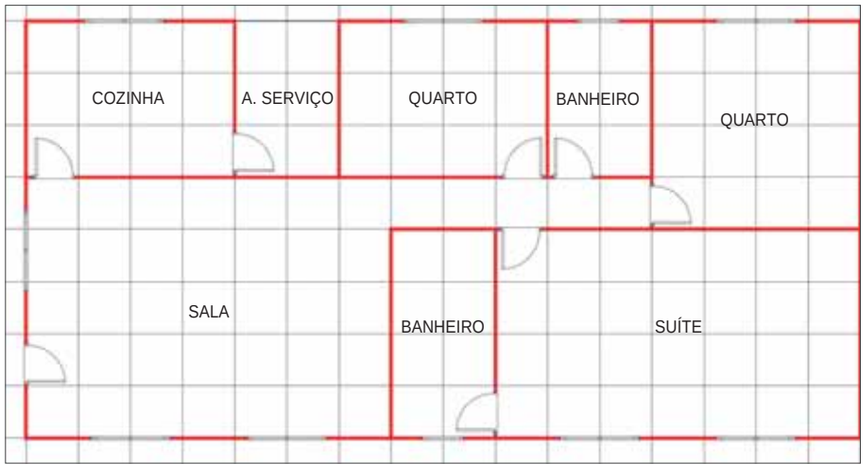
© Planomotor

A planta baixa é uma espécie de mapa de uma casa ou apartamento. É um desenho em escala feito com base em um corte horizontal de uma edificação.

A planta baixa permite que se conheçam a posição dos cômodos de uma habitação e a proporção entre as medidas de seus comprimentos.

ATIVIDADE 2 As medidas de uma casa

1 Na planta de uma casa, reproduzida a seguir, o comprimento da suíte é de 7 m.



© Planomotor

a) Qual é a escala dessa planta?

b) Dê as medidas dos cômodos indicados na planta.

Proporções na cozinha

Um lugar em que se usa muito a Matemática, mesmo sem se dar conta, é na cozinha. Cozinheiros têm de saber Matemática, em especial as noções de proporcionalidade, para que suas receitas não fiquem mais ou menos salgadas, doces, amargas, cruas, torradas etc.

Veja a importância de usar a proporção analisando uma receita de refresco.



© Erwin Purnomo Sidi/123RF

Junte o suco de 5 laranjas e de 1 limão e açúcar a gosto.

Misture com água gelada em uma jarra que tenha capacidade para 1,5 ℓ, enchendo-a, e passe por um coador.

Pronto! Você obteve 1,5 ℓ de refresco.

Esta receita dá para 6 copos de 250 mℓ.



© AnelSkelley/GettyImages

Seu José é o gerente do refeitório de uma empresa e, por causa do intenso calor, decidiu fazer refresco para os 36 funcionários.

Para aumentar a receita, é preciso ampliar as quantidades dos ingredientes, garantindo que a proporção entre elas seja a mesma da receita original, senão o refresco pode ficar azedo, doce demais ou aguado.

Analise a tabela que relaciona as quantidades.

Laranja	Limão	Litro de suco	Copo (de 250 mℓ)
5	1	1,5	6
10	2	3	12
15	3	4,5	18
20	4	6	24

×4 ×3 ×3 ×4

Dobrar uma receita implica duplicar a quantidade de todos os ingredientes envolvidos. Consequentemente, obtém-se o dobro da quantidade de refresco.

A razão entre o número de laranjas e o de limões deve ser a mesma.

Analisando a tabela, vê-se que, triplicando as quantidades de laranjas, de limões e de água gelada, a quantidade de litros de suco também triplica; quadruplicando os ingredientes, também se quadruplica a quantidade de refresco e de copos obtidos.

Nesses casos, para manter a proporção entre os ingredientes, a razão entre o número de laranjas e o de limões deve ser de “5 para 1”.

Agora suponha que, ao longo do dia, os 36 funcionários da empresa em que seu José trabalha consumam, em média, 5 copos de refresco cada um.

Acompanhe os cálculos:

Se 36 pessoas consomem, em média, 5 copos cada uma, prevê-se, portanto, o consumo de 180 copos de refresco (36 × 5 = 180 copos).

Se cada receita dá para 6 copos, é preciso fazer 30 receitas de refresco para obter 180 copos (180 ÷ 6 = 30 receitas).

Se cada receita produz 1,5 litros de refresco, devem ser produzidos 45 litros de refresco para o consumo de todos os funcionários (30 × 1,5 = 45 litros).

Copos	Litros
6	1,5
× 30	× 30
180	45

Quanto maior é a quantidade de copos, maior também é a quantidade de litros.

A receita deve render 30 vezes a receita básica. Isso quer dizer que a quantidade de cada ingrediente indicado na receita básica deve também ser aumentada 30 vezes.

	Receita original (1,5 litros)	Receita × 30 (45 litros)
Laranja	5	150
Limão	1	30
Copo de 250 mℓ	6	180

Quantas dúzias de laranja e quantas dúzias de limão são necessárias para produzir 45 litros de refresco?

Para aumentar ou diminuir uma receita de modo a manter o sabor e a consistência do produto final, usam-se os ingredientes na mesma **proporção** indicada na receita original.

ATIVIDADE 3 A matemática na cozinha

1 Veja os ingredientes necessários para fazer 30 balas de leite.

- 4 copos (250 mℓ) de leite;
- 3 copos (250 mℓ) de açúcar;
- 8 colheres (sopa) de mel.

a) Qual é a quantidade de ingredientes necessária para fazer 10 balas?

b) Qual é a quantidade de ingredientes necessária para fazer 90 balas?

c) Qual é a quantidade de ingredientes necessária para fazer 100 balas?

d) Um confeiteiro tem apenas 3 litros de leite, o que dá aproximadamente 12 copos. Os outros ingredientes, ele tem à vontade. Quantas balas dá para fazer com essa quantidade de leite?

e) Quantas balas dá para fazer quadruplicando a receita original?

2 Agora veja os ingredientes da receita de um bolo:

- 2 xícaras (chá) de açúcar;
- 2 colheres (sopa) bem cheias de manteiga;
- 3 gemas de ovo;
- 1 xícara (chá) de amido de milho;
- 2 xícaras (chá) de farinha de trigo;
- 1 vidro de 200 mℓ de leite de coco;
- 1 colher (chá) de fermento em pó.

1 kg de farinha equivale a aproximadamente 9 xícaras de chá.
1 xícara (chá) de açúcar equivale a aproximadamente 125 g.
2 colheres (sopa) bem cheias de manteiga equivalem a 40 g.

a) Quantos bolos dá para fazer com uma dúzia de ovos? (Não há restrições quanto aos outros ingredientes.)

b) Considere que a despensa tem os ingredientes em quantidade suficiente para fazer mais de 30 bolos, exceto o fermento. Há apenas uma embalagem de fermento em pó, que equivale a 15 colheres de chá. Quantos bolos dá para fazer nesse caso?

c) Quantos bolos dá para fazer com 1 kg de farinha de trigo?

d) Quantos bolos dá para fazer com 1 kg de manteiga?

e) Quantos bolos dá para fazer com 1 kg de açúcar?

3 Veja algumas receitas de molho de tomate. Em qual delas você acha que vai sobressair o gosto de cebola?

© Robyn Mackenzie/123RF; Olga Chernetskaya/123RF

Receita do Genaro	Receita da Concetta
	

a) A receita do Genaro ou a da Concetta? Justifique.

Receita do Marcelo	Receita da Sofia
	

© Robyn Mackenzie/123RF; Olga Chernetskaya/123RF

b) A receita do Marcelo ou a da Sofia? Justifique.

ATIVIDADE 4 A matemática em um negócio

Quando se abre um empreendimento em sociedade, os sócios podem contribuir com partes diferentes de capital para iniciar o negócio. Nesses casos, em geral, estabelecem por contrato uma retirada ou divisão dos lucros e prejuízos em partes proporcionais ao capital investido. Resolva os exercícios a seguir, em que é preciso calcular as quantidades apresentadas em cada situação.

1 João e José entraram em um negócio de coleta de latas de alumínio para vender em um posto de reciclagem. João trabalha 4 horas por dia, enquanto José trabalha 5 horas por dia. No final de um dos dias de trabalho, haviam recolhido cerca de 3.600 latas. Os dois resolveram dividir o arrecadado com a venda das latas proporcionalmente às horas trabalhadas naquele dia. Quantas latas couberam a cada um?

2 Romeu e Julieta montaram uma empresa chamada Goiabada com queijo. Para iniciar o negócio, Romeu entrou com R$ 1.500,00, e Julieta, com R$ 2.000,00. Então, decidiram que os lucros obtidos deveriam ser distribuídos proporcionalmente ao capital empregado.

a) Num primeiro momento, fizeram uma venda cujo lucro foi de R$ 700,00. Quanto coube a cada um?

b) No Dia das Crianças, as vendas foram um sucesso. A parte correspondente a Romeu foi de R$ 1.200,00. Logo, qual valor corresponde à parte de Julieta?

c) Nas festas de fim de ano, a empresa também teve um bom lucro. Julieta recebeu R$ 1.200,00. Quanto Romeu recebeu?

d) A empresa Goiabada com queijo vendeu mais no Dia das Crianças ou nas festas de fim de ano? Explique por quê.



DESAFIO

O proprietário de uma pequena loja de produtos naturais emprega duas funcionárias, Joana e Carolina. No mês de julho ele decidiu dividir um bônus de R$ 160,00 entre as duas funcionárias, de forma que cada uma receberia um valor inversamente proporcional ao número de faltas naquele mês. Carolina faltou 3 vezes, e Joana faltou 2. A quantia recebida por Joana como bônus é igual a:

a) R$ 72,00

b) R$ 80,00

c) R$ 96,00

d) R$ 108,00

Saresp 2005. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2005/Arquivos/Provas_EF_2005/7%C2%B0s%C3%A9rie%20EF%20tarde.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - O uso de razões na matemática

1 A relação foi de 10 candidatos para cada cargo na comissão, ou seja, 40 ÷ 10 = 4 representantes.

2

a) $\frac{4.200}{600}$ = 7 candidatos-vaga. Você pode resolver fazendo cálculo mental:

42 ÷ 6 = 7; assim, 4.200 ÷ 600 = 7.

b) $\frac{4.745}{365}$ = 13 candidatos-vaga.

Você pode estimar o resultado: 365 × 10 é 3.650, que é próximo de 4.745. Com isso, sabe-se que o resultado será maior que 10 e menor que 20. Veja, então, que se você fizer o cálculo escrito ou usar a calculadora, 4.745 ÷ 365 = 13.

3 Se 2 médicos correspondem a um grupo com 900 habitantes e 24 = 2 × 12, há 12 × 900 = 10.800 habitantes na cidade.

4 30 ÷ 2 = 15 e 11 × 15 = 165 candidatos.

Atividade 2 - As medidas de uma casa

1

a) 1 : 100 (1 cm – 1 m).

b) Quarto de 3 m por 4 m; outro quarto de 4 m por 4 m; cozinha de 4 m por 3 m; área de serviço de 2 m por 3 m; sala de 7 m por 5 m; banheiro da suíte de 2 m por 4 m; outro banheiro de 2 m por 3 m; suíte de 4 m por 7 m.

Atividade 3 - A matemática na cozinha

1

a) Como 10 = 30 ÷ 3, basta dividir as quantidades da receita inicial por 3, ou seja, $\frac{4}{3}$ de copo de leite, 1 copo de açúcar, $2\frac{2}{3}$ colheres de mel.

b) Como 90 = 3 × 30 , basta triplicar as quantidades da receita inicial: 12 copos de leite, 9 copos de açúcar, 24 colheres de mel, ou multiplicar as quantidades da receita do item **a** por 9.

c) Basta adicionar as quantidades da receita do item *a* com as do item *b*: $13\frac{1}{3}$ de copo de leite, 10 copos de açúcar, $26\frac{2}{3}$ colheres de mel.

d) 12 ÷ 4 = 3 receitas; 3 × 30 = 90 balas.

e) 4 × 30 = 120 balas.

2

a) Como, para fazer 1 bolo, são usadas 3 gemas de ovo, então, 12 ÷ 3 = 4 bolos.

b) Como, para fazer 1 bolo, é usada 1 colher (chá) de fermento em pó, então para fazer 15 bolos.

c) Como 1 kg de farinha equivale a 9 xícaras (chá) e, para fazer 1 bolo, são usadas 2 xícaras (chá) de farinha: 9 ÷ 2 = 4,5 bolos ou 4 bolos, sobrando 1 xícara de farinha.

d) 1 kg = 1.000 g; 1.000 ÷ 20 = 50. Como 1 kg de manteiga equivale a 50 colheres (sopa) bem cheias e, para fazer 1 bolo, são usadas 2 colheres (sopa) bem cheias de manteiga, 50 ÷ 2 = 25 bolos.

e) 1 kg = 1.000 g; 1.000 ÷ 125 = 8. Como 1 kg de açúcar equivale a 8 xícaras (chá) e, para fazer 1 bolo, são usadas 2 xícaras (chá) de açúcar, 8 ÷ 2 = 4 bolos.

3

a) Dobrando a receita do Genaro, haverá 16 tomates para 6 cebolas. Comparando com a receita de Concetta, de 16 tomates para 5 cebolas, conclui-se que a do Genaro tem mais gosto de cebola.

b) Triplicando a receita do Marcelo e comparando com a receita da Sofia, conclui-se que as duas receitas têm a mesma proporção de cebolas por tomates. Levando em conta apenas a relação entre esses ingredientes, os molhos devem ter o mesmo gosto de cebola.

Atividade 4 – A matemática em um negócio

1 Os dois trabalham 9 horas por dia, assim a razão das horas trabalhadas por eles será: João $\frac{4}{9}$ e José $\frac{5}{9}$. Isso significa que o total de latas recolhidas deve ser dividido em 9 partes, das quais 4 serão de João e 5 de José. Assim, 3.600 ÷ 9 = 400, sendo 4 × 400 = 1.600 o número de latas de João e 5 × 400 = 2.000 o número de latas de José.

2

a) Assim como no problema anterior, uma possibilidade de resolução é identificar a razão entre os investimentos, que é $\frac{1.500}{2.000}$, ou seja, $\frac{3}{4}$. O total de cotas é 3 + 4 = 7. A razão entre a cota de Romeu e o total é $\frac{3}{7}$. Assim, como 700 ÷ 7 = 100, então 3 × 100 = 300 e 700 – 300 = 400. Romeu ficou com R$ 300,00, e Julieta, com R$ 400,00.

b) Nesse caso, a informação que se tem é a parte correspondente a Romeu. A razão entre o que ele recebe e o que Julieta recebe é $\frac{3}{4}$. Como 1.200 ÷ 3 = 400 e 4 × 400 = 1.600, Julieta ficou com R$ 1.600,00.

c) $\frac{3}{4}$ de 1.200 = 900. Romeu recebeu R$ 900,00.

d) No Dia das Crianças, o lucro total foi de R$ 1.200,00 + R$ 1.600,00 = R$ 2.800,00, enquanto, nas festas de fim de ano, foi de R$ 1.200,00 + R$ 900,00 = R$ 2.100,00. Logo, no Dia das Crianças o lucro foi maior (R$ 700,00 a mais).

HORA DA CHECAGEM

Desafio

Alternativa correta: **c**. Dizer que a divisão é inversamente proporcional ao número de faltas de cada funcionária quer dizer que quem faltou menos receberá proporcionalmente mais dinheiro de bônus. Sendo assim,

Carolina teve 3 faltas de 5, logo receberá $\frac{2}{5}$ de R$ 160,00, ou seja,

$\frac{2}{5} \times 160 = \frac{2 \times 160}{5} = \frac{320}{5} =$ R$ 64,00.

E, Joana, que teve 2 faltas, receberá $\frac{3}{5}$ de R$ 160,00, ou seja,

$\frac{3}{5} \times 160 = \frac{3 \times 160}{5} = \frac{480}{5} =$ R$ 96,00.



Registro de dúvidas e comentários

HORA DO RESUMO: Razão, proporção, Regra de Três e Porcentagens

1. RAZÃO

Sejam dados dois números a e b $(b \neq 0)$, chamamos de razão entre estes dois números ao quociente indicado entre eles.

A razão $\frac{a}{b}$ também pode ser escrita a:b (que se lê **a está para b**. Os números a e b, que são os termos da razão, são denominados respectivamente de antecedente e conseqüente.

Como exemplos, vamos indicar a razão entre os números abaixo:

a) 3 e 7 por $\frac{3}{7}$ ou 3:7;

b) 9 e 5 por $\frac{9}{5}$ ou 9:5.

2. PROPORÇÃO

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Dizemos que os números a,b,c,d com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ estão em proporção, na ordem dada, se, e semente, a razão entre a e b for igual à razão entre c e d. Indicamos esta proporção por:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou a:b::c:d que se lê:

a está para b, assim como c está para d.

Propriedade fundamental das proporções

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Aplicando esta propriedade, podemos determinar o valor de uma incógnita na proporção.

3. REGRA DE RÊS

Grandezas Diretamente proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra aumenta na mesma razão da primeira.

Exemplo:

Um veículo que percorre:

- 80km em 1 hora.
- 160km em 2 horas.
- 240km em 3 horas.

Enquanto o tempo aumenta, a distância percorrida também aumenta. Dizemos então, que o tempo e a distância são grandezas diretamente proporcionais.

Grandezas inversamente proprocionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma razão da primeira.

Exemplo:

Um veículo faz um percurso em:

- 1 hora com velocidade de 120km/h.
- 2 horas com velocidade de 60km/h.
- 3 horas com velocidade de 40km/h.

Enquanto o tempo aumenta, a velocidade diminui. Dizemos, então, que o tempo e a velocidade são grandezas inversamente proporcionais.

4. REGRA DE TRÊS SIMPLES

É uma regra prática, que facilita o cálculo de problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Regra de três direta

Apresenta grandezas diretamente proporcionais.

Exemplos:

a) um pacote contém 35 chocolates. Qual é o total de chocolates contidos em 4 pacotes?

Dispositivo prático:

pacotes	chocolates
1	35
4	x

As grandezas são diretamente proporcionais, pois aumentando-se a quantidade de pacotes o número de chocolates também aumenta.

Quando as grandezas são diretamente proporcionais, as flechas têm o mesmo sentido. Montando a proporção, temos:

$\frac{1}{4} = \frac{35}{x}$

$x = 4 \cdot 35$ propriedade fundamental das proporções

$x = 140$

Resposta: o total é 140 chocolates.

b) Certa máquina produz 90 peças, trabalhando durante 50 minutos. Quantas peças produzirá em 1h20min?

Dispositivo prático:

produção	tempo
90 peças	50 min
x	80mi - 1h20min = 80min

As grandezas são diretamente proporcionais, pois aumentando o tempo a produção também aumenta.

Montando a proporção, temos:

$$\frac{90}{x}=\frac{50}{80}$$

$$50\cdot x = 90\cdot 80$$

$$50x = 7.200$$

$$x=\frac{7.200}{50}$$

$$x = 144$$

Resposta: em 1h20min a máquina produzirá 144 peças.

Regra de três inversa

Apresenta grandezas inversamente proporcionais.

5. *REGRA DE TRÊS COMPOSTA*

A regra de três composta é um processo prático para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

6. *PORCENTAGEM*

Uma razão de conseqüente 100 é denominada taxa de porcentagem, ou taxa porcentual, ou ainda "tantos por cento".

$\left(\frac{x}{100}\right)$ — x: antecedente; 100: conseqüente

Assim, $\frac{20}{100}$ (vinte centésimos) lê-se "20 por cento" e representa-se pelo símbolo 20%.

Significado da taxa de porcentagem

Vamos interpretar determinadas frases que ouvimos ou lemos, quase que diariamente:

a) "Para sermos aprovados pelo Vestibular de uma grande faculdade, devemos acertar no mínimo 50% das questões".

Significa que sobre cada 100 questões, devemos acertar no mínimo 50.

b) "Liquidação com desconto de 40%".

Significa que sobre cada R$ 100,00 do preço de uma determinada mercadoria, há um desconto de R$ 40,00.

c) "Certo candidato está com 30% da preferência popular".

Significa que sobre cada 100 pessoas, 30 gostam do candidato.

Cálculo da porcentagem

Exemplo: achar 16% de 300.

Resolução:

16% é o valor que eu tenho que achar (x)

300 é 100%

montando uma regra de três.

$$\left.\begin{matrix}16-100\\ x-300\end{matrix}\right\} x=\frac{300\cdot 16}{100}\Rightarrow x=48$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 **(PUC-SP)** Um motorista de táxi, trabalhando 6 horas por dia durante 10 dias, gasta R$ 1.026.00. Qual será o seu gasto mensal, se trabalhar 4 horas por dia?

Resolução:

Horas	Valor R$
6	1.026,00
4	X

$$6.x = 4.1026,00$$

$$x=\frac{4.1026}{6}=684$$

R$ 684,00 em dez dias, conforme enunciado.

Gasto mensal:

Gasto em dez (10) dias x 3 (30 dias) = 2052

R$ 2.052,00.

---

2 Calcular o termo desconhecido na proporção:

$$\frac{7}{13}=\frac{21}{x}$$

Resolução:

Usando a propriedade fundamental, temos:

$$7x = 21\cdot 13 \Rightarrow x=\frac{21\cdot 13}{7}\Rightarrow x = 39\ .$$

---

3 Um carro percorreu uma estrada em 5 horas, à velocidade média de 100km/h. Com qual velocidade o carro faria o mesmo percurso em 4 horas?

Resolução:

Dispositivo prático:

velocidade	tempo
100	5
x	4

As grandezas são inversamente proporcionais, pois, à medida que diminui o tempo da viagem, é necessário que a velocidade do carro aumente, para que o carro percorra o mesmo percurso.

Quando as grandezas são inversamente proporcionais, as flechas têm sentidos contrários.

Montando a proporção, temos:

$\frac{x}{100} = \frac{5}{4} \Rightarrow$ uma das grandezas se inverte

$4 \cdot x = 100 \cdot 5$

$4x = 500$

$x = \frac{500}{4}$

$x = 125$

125 km/h.

---

4 Vinte homens fazem um certo trabalho em 6 dias, trabalhando 8 horas por dia. Para fazer o mesmo trabalho, quantos dias levarão 12 homens, trabalhando 5 horas por dia?

Resolução:

homens	dias	horas/dias
20	6	8
12	x	5

Então:

$\frac{6}{x} = \frac{12}{20} \cdot \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{60}{160} \Rightarrow$

$\frac{6}{x} = \frac{3}{8} \Rightarrow 3 \cdot x = 6 \cdot 8 \Rightarrow$

$3 \cdot x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{3} \Rightarrow x = 16$

EXERCÍCIOS

1 **(MACK-SP)** Uma engrenagem de 36 dentes movimenta outra de 48 dentes. Quantas voltas dá a maior, enquanto a menor dá 100 voltas?
a) 133.
b) 86.
c) 75.
d) 65.

---

2 **(SANTA CASA-SP)** Sabe-se que 4 máquinas operando 4 horas por dia, durante 4 dias, produzem 4 toneladas de certo produto. Quantas toneladas do mesmo produto seriam produzidas por 6 máquinas daquele tipo, operando 6 horas por dia, durante 6 dias?
a) 8.
b) 15.
c) 10,5.
d) 13,5.

---

3 **(FUCC-SP)** Quanto é 32% de R$25.000,00?
a) R$5.500,00.
b) R$7.500,00.
c) R$8.000,00.
d) R$10.000,00.

---

4 **(PUC-SP)** 15000 candidatos inscreveram-se na PUC e foram aprovados 9600. Qual a porcentagem de reprovação?
a) 24.
b) 30.
c) 32.
d) 36.
e) Nenhuma.

---

5 **(CEF)** Num grupo de 400 pessoas, 70% são do sexo masculino. Se nesse grupo 10% dos homens são casados e 20% das mulheres são casadas. Então, o número de pessoas casadas é:
a) 50.
b) 46.
c) 52.
d) 48.
e) 54.

---

6 Se $\frac{2}{5}$ de um trabalho foram feitos em 10 dias por 24 operários que trabalhavam em 7 horas por dia; então, quantos dias serão necessários para terminar o trabalho, sabendo que 4 operários foram dispensados e que o restante agora trabalha 6 horas por dia?
a) 18.
b) 19.
c) 20.
d) 21.
e) 22.

GABARITO

1 C

2 D

3 C

4 D

5 C

6 D

Usando problemas que envolvem razões, você aprenderá a identificar a porcentagem como uma razão especial, percebendo a importância dela no nosso dia a dia.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

A porcentagem está presente em nossa vida, em nosso cotidiano. Em dia de eleição, por exemplo, o telejornal apresenta as variações percentuais dos candidatos no processo eleitoral.

O aumento do salário mínimo se dá ano a ano e também é apresentado por meio de índices percentuais, como o aumento do combustível, das mercadorias vendidas no supermercado, dos materiais escolares etc.

Variações percentuais

De todas as razões estudadas na escola, é provável que a mais importante, em função do uso em praticamente todas as atividades profissionais e científicas, seja a porcentagem, que pode ser interpretada como a razão em que o denominador é **100**.

Em geral, uma razão cujo segundo termo é igual a 100 é chamada taxa percentual.

Taxa percentual: $\frac{\text{número}}{100}$

Taxa percentual: $37\% = \frac{37}{100}$

Use essas ideias para interpretar manchetes de jornal.



© R2 Editorial

(*) Fonte: SEGNINI, Liliana R. P. *Mercado de trabalho no Brasil*: um retrato baseado nas estatísticas nacionais, fev. 2012. Rais/MTE (2003 e 2010) e PNAD/IBGE (2003 e 2009).
(**) PNAD 2009 – IBGE. Disponível em: <http://saladeimprensa.ibge.gov.br/noticias?view=noticia&id=1&idnoticia=1708&busca=1&t=pnad-2009-rendimento-numero-trabalhadores-carteira-assinada-sobem-desocupacao-aumenta>. Acesso em: 13 fev. 2014.

Dizer que “36 em cada 100 trabalhadores domésticos não têm a carteira assinada” equivale a dizer que 36% dos trabalhadores domésticos não estão registrados.

Cada uma das notícias está expressa por uma razão, mas elas podem ser citadas por uma **porcentagem**. As porcentagens expressam relações entre uma quantidade e o número **100**. Daí o nome porcentagem (**por cento**).

ATIVIDADE 1 Manchetes equivalentes: analisando a notícia

1 Suponha que as manchetes apresentadas no quadro a seguir se refiram a um universo de 50 mil trabalhadores da cidade de Montanha Acima.

83% dos trabalhadores têm registro na carteira	54% dos trabalhadores estão sindicalizados
51% dos trabalhadores estudam à noite	60% dos trabalhadores ganham mais que 1 salário mínimo

Considerando as informações do quadro, quantos trabalhadores de Montanha Acima têm registro na carteira? Acompanhe os cálculos.

- Para cada 100 trabalhadores, 83 têm registro em carteira.
- É preciso saber quantos grupos de 100 há em 50 mil.
- Em 50 mil, há 500 grupos de 100, pois 50.000 ÷ 100 = 500.
- 83% significa 83 por 100, ou seja, 83 em cada 100.
- 83 × 500 = 41.500; assim, se a pesquisa estiver correta, 41.500 habitantes têm carteira assinada em Montanha Acima.

Agora é com você! Para responder às questões a seguir, considere o universo de Montanha Acima, com seus 50.000 trabalhadores.

a) Quantos trabalhadores de Montanha Acima estudam à noite?

b) Quantos são sindicalizados?

c) Quantos ganham mais que um salário mínimo?

d) Quantos ganham um salário mínimo ou menos?

Aplicações de porcentagens

O conhecimento e o uso das porcentagens são importantes para resolver uma variedade de problemas. Aprofunde seu conhecimento sobre porcentagem por meio da resolução de situações-problemas.

Veja como calcular porcentagens:

- Calcular 15% de 8.400.

8.400 ÷ 100 = 84

84 × 15 = 1.260

15% de 8.400 é 1.260.

• Uma companhia aérea anunciou que reajustará os preços de suas passagens em 20% no próximo mês. Sabendo que o preço da passagem de um dos voos é R$ 250,00, qual deve ser o novo preço, com o acréscimo?

Para cada R$ 100,00, o passageiro vai pagar mais R$ 20,00.

250 ÷ 100 = 2,5 → 2,5 × 20 = 50

O novo preço será de R$ 250,00 + R$ 50,00 = R$ 300,00.

• O quilo de feijão, sem desconto, custa R$ 4,00. De acordo com o anúncio a seguir, qual deve ser o preço por quilo no próximo sábado?



R2 Editorial sobre foto:
© Fernando Favoretto/CriarImagem

Para cada 100 centavos (R$ 1,00), o comerciante dá um desconto de 15 centavos (R$ 0,15).

R$ 4,00 equivalem a 400 centavos de real.

400 ÷ 100 = 4 (em 4 reais há 4 grupos de 100 centavos)

4 × 15 = 60 (60 centavos de desconto por quilo)

No próximo sábado, o quilo de feijão-preto vai custar:

R$ 4,00 – R$ 0,60 = R$ 3,40.

• O televisor está em oferta.



R2 Editorial sobre foto: © Peter Lecko/123RF

Em relação ao preço à vista, quanto vai pagar quem comprar o televisor a prazo?

A prazo: 2 × R$ 300,00 = R$ 600,00.

Diferença: R$ 600,00 – R$ 500,00 = R$ 100,00.

A que fração do preço à vista corresponde os R$ 100,00?

100 está para 500 assim como 1 está para 5 ou

2 está para 10 ou

20 está para 100.

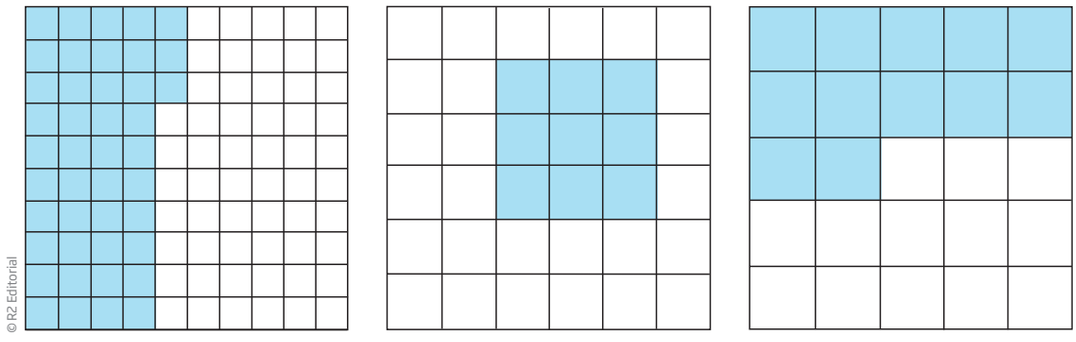
São razões equivalentes.

O acréscimo que se paga quando a compra é feita a prazo corresponde a 20% do preço à vista.

ATIVIDADE 2 Cálculo de porcentagem

1 Determine a porcentagem correspondente à região pintada de azul em cada quadrado.

a) _____ b) _____ c) _____



© R2 Editorial

2 "8 em cada 10 estrelas de cinema preferem o desodorante Aroma Suave". Quantos por cento das estrelas de cinema preferem esse desodorante?

3 Gil das Contas participou de uma maratona de Matemática da escola e acertou 72% das 150 questões. Quantas questões ele acertou?

4 Seu Manuel, que vende laranjas na feira, dá um desconto de 25% para compras acima de 5 dúzias. Ele vende uma dúzia e meia de laranja por R$ 3,00. Resolvi comprar 144 laranjas. Quanto devo pagar?

5 O serviço de energia elétrica cobra uma multa de 2% ao dia se a conta é paga com atraso. Qual deverá ser o preço pago no dia 13 por uma conta de energia de R$ 48,00 que venceu no dia 10?

ATIVIDADE 3 Razões e índices: censo demográfico

O desenvolvimento de um país revela a capacidade produtiva de sua população e é medido com base em números da economia, da saúde e da educação. Almanaques, atlas e livros de Geografia são recheados de dados estatísticos sobre o Brasil. Veja alguns desses dados:

Para cada grupo de 16 brasileiros que moram na cidade, há 3 brasileiros que moram no campo.
Há aproximadamente 1,84 médicos em cada grupo de 1.000 habitantes.
9,6 em cada grupo de 100 habitantes maiores de 15 anos são analfabetos.
17,6 em 1.000 crianças morrem antes de completar 1 ano de idade.

Fonte: IBGE. Censo Demográfico 2010. Disponível em: <http://www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?uf=35&dados=0>. Acesso em: 11 abr. 2014.

Considerando essas relações de proporcionalidade, responda aos itens a seguir (com base na estimativa da população brasileira de 2010 de, aproximadamente, 190 milhões de habitantes).

1 Quantos brasileiros, aproximadamente, moram no campo?

2 Que taxa percentual representa os brasileiros que moram no campo? E na cidade?

3 Quantos são, aproximadamente, os médicos brasileiros?

4 Considerando que cerca de 144,8 milhões de pessoas têm mais de 15 anos no Brasil, quantas pessoas com mais de 15 anos são analfabetas?

5 Qual é o percentual de crianças que não chegam a completar 1 ano de idade?

ATIVIDADE 4 Revisão e aprofundamento

1 Indique qual é a compra mais econômica, depois de efetuar as contas.

a) _____



5 kg por R$ 8,00



2 kg por R$ 3,40



© Luís Dávila

$\frac{1}{2}$ kg por R$ 0,90

b) _____



2 dúzias por R$ 3,70



3 dúzias por R$ 4,40



© Silvestre Machado/Opção Brasil Imagens

5 dúzias por R$ 9,00

c) _____



300 g por R$ 2,70



500 g por R$ 4,25



© V. J. Matthew/123RF

1 kg por R$ 9,50

d)



10 por R$ 5,60



5 por R$ 3,00



© João Prudente/Pulsar Imagens

12 por R$ 6,00

e)



1 kg por R$ 0,99



2 kg por R$ 1,90



© Luis Dávila

5 kg por R$ 4,70

2 Calcule os valores correspondentes às seguintes porcentagens:

a) 10% de 2.400 =

c) 40% de 2.400 =

b) 20% de 2.400 =

d) 4% de 2.400 =

e) 10% de 960 =

h) 15% de 960 =

f) 20% de 960 =

i) 7,5% de 960 =

g) 30% de 960 =

j) 3% de 960 =

3 Encontre os valores das porcentagens abaixo:

a) 4% de 2.400 =

d) 54% de 2.400 =

b) 44% de 2.400 =

e) 50% de 960 =

c) 60% de 2.400 =

f) 25% de 960 =

g) 75% de 960 =

h) 25% de 96 =

i) 12,5% de 96 =

4 Em um jogo de basquete, João acertou 13 cestas em 25 tentativas, e Marcelo fez 12 cestas em 24 tentativas. Quem teve o melhor rendimento?

5 Na última avaliação, Mariana acertou 23 de 40 questões de Matemática e Júlia acertou 29 de 50. Quem teve o melhor rendimento?

6 Nilson e Isolda resolveram abrir uma poupança conjunta. Nilson entrou com R$ 2.500,00, e Isolda, com R$ 2.000,00. Depois de certo tempo, o casal fez uma retirada de R$ 6.300,00, que foi dividida proporcionalmente aos respectivos depósitos. Quanto coube a cada um?

7 André e Cláudia fizeram uma sociedade para montar um negócio de perucas. André entrou com um capital de R$ 1.600,00, e Cláudia, com R$ 600,00. Nas festas de fim de ano, tiveram R$ 891,00 de lucro, que foi repartido proporcionalmente ao que cada um aplicou. Quanto coube a cada sócio?

8 No exame vestibular, dos 36.000 habilitados para concorrer à 2ª fase, 11% não compareceram. Quantos candidatos fizeram o exame?

9 Em uma pesquisa sobre a preferência por times de futebol, verificou-se que 4 em cada 10 habitantes de uma cidade torciam pelo time B.

a) Que porcentagem dos moradores essa proporção representa?

b) Supondo que a cidade tenha 250 mil habitantes, quantos deles torcem pelo time B?

10 Um padeiro deseja fazer uma fornada dupla de biscoitos de chocolate e meia fornada de biscoitos de coco. As receitas dizem que uma fornada de biscoitos de chocolate leva $2\frac{3}{4}$ xícaras de açúcar, e uma fornada de biscoitos de coco, $2\frac{1}{2}$ xícaras de açúcar. Se uma xícara de açúcar pesa cerca de 80 g, de quantos gramas de açúcar precisará o padeiro?

11 Um professor precisa ler 36 trabalhos de seus alunos. Nos primeiros 45 minutos, ele lê 4 trabalhos. Admitindo que ele continue a trabalhar no mesmo ritmo, quanto tempo levará para ler todos os trabalhos?

12 Um pintor mistura 4 partes de tinta branca com 1 parte de tinta vermelha para obter cor-de-rosa claro. Ele tem 2 litros de tinta cor-de-rosa de tom mais escuro, resultante da mistura, em partes iguais, de tinta vermelha e branca. Que quantidade de tinta branca deve ser misturada à tinta cor-de-rosa de tom mais escuro para transformá-la em cor-de-rosa claro?

13 Um jardineiro experiente tem de preparar um campo de futebol oficial de 64 m × 90 m. Quantos quilos de semente ele vai precisar, sabendo que 1 kg dá para semear 16 m^2?

14 Joana aplicou R$ 3.000,00 na poupança. No final de 4 meses, ela obteve 27,5% entre rendimento e correção monetária. Qual é o montante disponível em sua poupança?

DESAFIO

Marcos fez um empréstimo de R$ 120.000,00 que deverá pagar com juros de 1% sobre o valor emprestado a cada mês. Sabendo que ele pagou R$ 6.000,00 de juros, quantos meses levou para pagar o empréstimo?

a) 3 meses
b) 4 meses
c) 5 meses
d) 6 meses

Saresp 2005. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2005/Arquivos/Provas_EF_2005/7%C2%BOs%C3%A9rie%20EF%20tarde.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

PENSE SOBRE...

O censo demográfico realizado em 2010 pelo IBGE, órgão do governo federal, indica modificações importantes na população brasileira. A população envelheceu. No ano de 2000, metade da população tinha menos de 25 anos. Em 2010, 43 em cada 100 habitantes tinham menos de 25 anos. Mudou também o número de pessoas por domicílio: em 2000 havia 3,8 pessoas por domicílio e, em 2010, eram 3,3. Em sua opinião, como as políticas públicas precisam se organizar a fim de atender a esse novo desenho da população brasileira?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Manchetes equivalentes: analisando a notícia

1

a) Como em 50.000 há 500 grupos com 100 em cada um, significa que 1% de 50.000 é 500, então em 51% serão 51 × 500 = 25.500; logo, 25.500 trabalhadores estudam à noite.

b) Pensando do mesmo modo, 54% serão 54 × 500 = 27.000; logo 27.000 trabalhadores são sindicalizados.

c) Para calcular 60%, calcula-se 60 × 500 = 30.000; logo 30.000 trabalhadores ganham mais que um salário mínimo.

d) Como no item c já ficou determinado que os trabalhadores que ganham mais que um salário mínimo são 30.000, então os que ganham um salário mínimo ou menos são os 20.000 trabalhadores restantes.

Outro modo de calcular seria pensar na porcentagem, isto é, se 60% corresponde aos que ganham mais que um salário mínimo, então o que se busca aqui corresponde a 40% do total de trabalhadores. Assim $\frac{50.000 \times 40}{100}$ = 20.000 trabalhadores.

Atividade 2 - Cálculo de porcentagem

1

a) 43 em 100 são 43%.

b) Para determinar a porcentagem em situações como esta de 9 em 36, pode-se calcular a divisão de 9 por 36, multiplicar o resultado por 100 e obter 25%.

c) Do mesmo modo, 12 em 25 pode ser calculado como 12 ÷ 25 × 100 = 48, logo são 48%.

2 8 em cada 10 equivale a 80 em cada 100. Logo, 80%.

3 150 ÷ 100 = 1,5; 1,5 × 72 = 108 questões.

4 144 são 8 × 18 laranjas (uma dúzia e meia) ou ainda 144 laranjas ÷ 18 (uma dúzia e meia) = 8. Então, o preço de 144 laranjas é 8 × R$ 3,00 = R$ 24,00.

Como 144 = 12 × 12 (uma dúzia) e seu Manuel dá desconto de 25% para compras acima de 5 dúzias, se 25% de R$ 24,00 são R$ 6,00, pagarei, então: R$ 24,00 – R$ 6,00 = R$ 18,00.

5 Multa de 2% ao dia, de uma conta de R$ 48,00: 2% de R$ 48,00 é R$ 0,96 por dia. Como se passaram 3 dias, o valor da multa total será de R$ 0,96 × 3 = R$ 2,88. Portanto, o valor da conta será de R$ 48,00 + R$ 2,88 = R$ 50,88. Ou ainda, se foram 3 dias de multa, acumula-se um percentual de 6% (3 × 2% = 6%). Como 6% de R$ 48,00 são R$ 2,88, R$ 48,00 + R$ 2,88 = R$ 50,88.

Atividade 3 - Razões e índices: censo demográfico

1 Para o total de 19 brasileiros (16 + 3), 3 moram no campo. Como a população é de aproximadamente 190 milhões de habitantes, moram no campo cerca de 30 milhões.

2 $\frac{30.000.000}{190.000.000} = \frac{3}{19} \cong 0,158 \cong 15,8\%$. Aproximadamente 15,8% no campo;

190.000.000 – 30.000.000 = 160.000.000 → $\frac{160.000.000}{190.000.000} = \frac{16}{19} \cong 0,842 \cong 84,2\%$ e 84,2% na cidade.

Sabendo que cerca de 15,8% das pessoas moram no campo, também é possível calcular a porcentagem aproximada de pessoas que moram na cidade por meio da subtração: 100 – 15,8 = 84,2%.

3 Em 190 milhões de brasileiros, há 190 mil grupos de mil pessoas:

190.000.000 ÷ 1.000 = 190.000

Em cada um desses grupos, há cerca de 1,84 médicos.
Como 190.000 × 1,84 = 349.600, há aproximadamente 349,6 mil médicos.

4 Em 144,8 milhões de pessoas, há 1,448 milhões de grupos de 100 pessoas:

144.800.000 ÷ 100 = 1.488.000

Em cada um desses grupos há 9,6 analfabetos. Então, como 9,6 × 1.448.000 = 13.900.800, aproximadamente 14 milhões de pessoas com mais de 15 anos são analfabetas.

5 $\frac{17,6}{1.000} = \frac{1,76}{100}$, isto é, 1,76%.

Atividade 4 - Revisão e aprofundamento

1

a)

5 kg por R$ 8,00	2 kg por R$ 3,40	$\frac{1}{2}$ kg por R$ 0,90
1 kg → R$ 1,60 (melhor)	1 kg → R$ 1,70	1 kg → R$ 1,80

b)

2 dúzias por R$ 3,70	3 dúzias por R$ 4,40	5 dúzias por R$ 9,00
1 dúzia → R$ 1,85	1 dúzia → aproximadamente R$ 1,47 (melhor)	1 dúzia → R$ 1,80

c)

300 g por R$ 2,70	500 g por R$ 4,25	1 kg por R$ 9,50
100 g → R$ 0,90	100 g → R$ 0,85 (melhor)	100 g → R$ 0,95

d)

10 pãezinhos por R$ 5,60	5 pãezinhos por R$ 3,00	12 pãezinhos por R$ 6,00
1 pãozinho → R$ 0,56	1 pãozinho → R$ 0,60	1 pãozinho → R$ 0,50 (melhor)

e)

1 kg por R$ 0,99	2 kg por R$ 1,90	5 kg por R$ 4,70
1 kg → R$ 0,99	1 kg → R$ 0,95	1 kg → R$ 0,94 (melhor)

2

a) 2.400 ÷ 10 = 240

b) dobro de 10% de 2.400 → 480

c) dobro de 20% de 2.400 → 960

d) décima parte de 40% de 2.400 → 96

e) 960 ÷ 10 = 96

f) dobro de 10% de 960 → 192

g) (10% + 20%) de 960 = 96 + 192 = 288

h) metade de 30% de 960 → 144

i) metade de 15% de 960 → 72

j) décima parte de 30% de 960 → 28,8

HORA DA CHECAGEM

3

a) décima parte de 40% de 2.400 → 96

b) (40% + 4%) de 2.400 = 960 + 96 = 1.056

c) (100% – 40%) de 2.400 = 2.400 – 960 = 1.440

d) (60% – 6%) de 2.400 = 1.440 – 144 = 1.296 ou (50% + 4%) de 2.400 = 1.200 + 96 = 1.296

e) metade de 960 → 480

f) metade da metade de 960 → 240

g) (50% + 25%) de 960 = 480 + 240 = 720 ou (100% – 25%) de 960 = 960 – 240 = 720

h) décima parte de 25% de 960 → 24

i) metade de 25% de 96 → 12

4 13 em 25 equivale a 26 em 50 e a 52 em 100, ou seja, 52%. João acertou 52% das cestas, enquanto Marcelo acertou metade das cestas, 50%. Portanto, João teve o melhor rendimento. Outra forma de raciocínio: 12 é metade de 24 e 13 é mais do que a metade de 25; logo, João teve melhor rendimento.

5 $\frac{23}{40}$ = 0,575. Traduzindo em porcentagem, Mariana acertou 57,5 em 100, ou seja, 57,5%, ao passo que Júlia acertou 29 em 50, que é o mesmo que 58 em 100, ou seja, 58%. Logo, Júlia teve melhor rendimento.

6 Eles tinham um total de R$ 4.500,00. R$ 2.500,00 está para R$ 4.500,00 assim como o que Nilson recebeu está para R$ 6.300,00. 2.500 é $\frac{5}{9}$ de 4.500. Logo, Nilson recebeu $\frac{5}{9}$ de 6.300. $\frac{1}{9}$ de 6.300 é 700, então $\frac{5}{9}$ é igual a 3.500. Então, Nilson ficou com R$ 3.500,00, e Isolda, com R$ 2.800,00 (6.300 – 3.500 = 2.800).

Outro modo de pensar: a relação entre os investimentos de Isolda e Nilson é $\frac{2.000}{2.500}$, ou seja, $\frac{4}{5}$. Isso corresponde a um total de 9 cotas: 4 de Isolda e 5 de Nilson. Levando em conta que foram retirados R$ 6.300,00, cada cota corresponde a R$ 6.300,00 ÷ 9 = R$ 700,00. Logo, Isolda recebeu 4 × R$ 700,00 = R$ 2.800,00, e Nilson, 5 × R$ 700,00 = R$ 3.500,00.

7 Cláudia entrou com R$ 600,00 de um total de R$ 2.200,00 (R$ 1.600,00 + R$ 600,00 = R$ 2.200,00), que é o mesmo que 3 partes de um total de 11 $\left(\frac{600}{2.200} = \frac{3}{11}\right)$. Como o lucro foi R$ 891,00, 1 parte em 11 desse lucro é R$ 891,00 ÷ 11 = R$ 81,00, então 3 partes são R$ 243,00. Cláudia recebeu R$ 243,00. Logo, André ficou com: R$ 891,00 – R$ 243,00 = R$ 648,00. Outra forma de pensar a questão é levar em conta a razão dos investimentos, que é $\frac{600}{1.600} = \frac{3}{8}$.

8 11% de 36.000 → 11 × 360 = 3.960. O número dos que fizeram o exame é 36.000 – 3.960 = 32.040. Aqui também há outras possibilidades de resolução, entre elas: se 11% não compareceram, então 89% o fizeram; 89% de 36.000 → 89 × 360 = 32.040.

9

a) $\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ = 40%

b) 40% de 250.000 = 100.000

HORA DA CHECAGEM

10 Biscoitos de chocolate (fornada dupla): $5\frac{1}{2}$ xícaras.

Biscoitos de coco (meia fornada): $1\frac{1}{4}$ xícara.

6 xícaras → 80 g × 6 = 480 g; $\frac{1}{2}$ xícara → 40 g; $\frac{1}{4}$ xícara → 20 g

Total: 540 g.

11 36 é 9 × 4. Se leva 45 minutos para ler 4 trabalhos, levará 9 × 45 = 405 min para ler todos. Como cada 60 min equivalem a 1 h, em 405 min cabem 405 ÷ 60 → 6 h e 45 min.

12 Como o pintor já tem 2 litros de tinta cor-de-rosa de tom mais escuro, resultante da mistura, em partes iguais, de tinta vermelha e branca, então ele possui uma mistura com 1 litro de tinta vermelha e 1 litro de tinta branca. Considerando que ele precisa de 4 partes de tinta branca e 1 de tinta vermelha e já tem 1 litro de cada, serão precisos, então, mais 3 litros de tinta branca.

13 64 m × 90 m = 5.760 m^2. Como para cada 16 m^2, é preciso 1 kg de semente, então, para 5.760 m^2, são necessários 5.760 ÷ 16 = 360 kg.

14 25% de 3.000 = 750; 2,5% de 3.000 = 75; 27,5% de 3.000 = 750 + 75 = 825. Logo, o montante é de: R$ 3.000,00 + R$ 825,00 = R$ 3.825,00.

Desafio

Alternativa correta: **c**. Marcos pagava 1% de 120 mil reais por mês, então ele pagava:

$\frac{1}{100} \times 120.000 = \frac{120.000}{100}$ = R$ 1.200,00.

Como ele já pagou R$ 6.000,00 de juros, então 6.000 ÷ 1.200 = 5 meses.

Registro de dúvidas e comentários

DIVISÃO EM PARTES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Suponhamos que você queira dividir o número 180 em partes diretamente proporcionais a 2, 5 e 11. Isso significa dividir o número 180 em três parcelas, tais que a razão da primeira parcela para o número 2 seja igual à razão da segunda parcela para o número 5 e igual à razão da terceira parcela para o número 11. Assim, chamando de **x, y e z,** respectivamente, cada uma dessas parcelas, devemos verificar que:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$$

Além disso, como **x, y** e **z** são as parcelas em que dividimos o número 180, devemos ter:

$$x + y + z = 180$$

Sendo assim, podemos escrever:

$$\frac{x+y+z}{2+5+11} = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$$

ou

$$\frac{180}{18} = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11}$$

Como $\frac{180}{18} = 10$, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{11} = 10$$

Daí,

$\frac{x}{2} = 10 \rightarrow x = 20$

$\frac{y}{5} = 10 \rightarrow y = 50$

$\frac{z}{11} = 10 \rightarrow z = 110$

Sendo 20 + 50 + 110 = 180, concluímos que as partes procuradas são: 20, 50 e 110.

DIVISÃO EM PARTES INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Suponhamos, agora, que você queira dividir o número 210 em partes inversamente proporcionais a 3, 5 e 6, isto é, determinar parcelas **x, y** e **z**, tais que:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{6}}$$

Sabendo disso, basta desenvolver o mesmo algoritmo da divisão proporcional.

Exemplos:

01. Divida o número 70 em partes proporcionais aos números 2, 3 e 5.

02. Divida o número 260 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 4.

03. divida 392 em partes ao mesmo tempo diretamente proporcionais a 2, 3,4 e a 3, 5,7.

04. divida 175 em partes diretamente proporcionais a 5/4 , 3, 4 e, ao mesmo tempo, inversamente proporcionais a 3/4, 6, 2.

Exercícios

1. Três funcionários, **A, B** e **C**, decidem dividir entre si a tarefa de conferir o preenchimento de 420 formulários. A divisão deverá ser feita na razão inversa de seus respectivos tempos de serviço no Tribunal. Se **A, B** e **C** trabalham no Tribunal há 3, 5 e 6 anos, respectivamente, o número de formulários que B deverá conferir é:

   (A) 100

   (B) 120

   (C) 200

   (D) 240

   (E) 250

2. Um comerciante resolveu dividir parte de seu lucro com seus 3 empregados, em partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço. Se a quantia distribuída foi R$ 69 000,00 e cada empregado está na casa, respectivamente a 5, 8 e 10 anos, o empregado mais antigo recebeu:

(A) R$ 15 000,00

(B) R$ 18 000,00

(C) R$ 21 000,00

(D) R$ 24 000,00

(E) R$ 30 000,00

3. Uma pessoa, ao morrer, deixou a herança de R$ 21 720 000,00 para ser repartida entre 3 herdeiros, ao mesmo tempo, em partes diretamente proporcionais a 3, 5 e 3/4 e inversamente a 2/3, 3/5 e 1/3. A menor das três partes da herança foi de:

(A) R$ 6 480 000,00

(B) R$ 12 000 000,00

(C) R$ 3 240 000,00

(D) R$ 2 500 000,00

(E) R$ 3 000 000,00

Gabarito

01. x = 14 , y = 21 e z = 35

02. x = 120 , y = 80 e z = 60

03. x = 48 , y = 120 e z = 224

04. x = 70 , y = 21 e z = 84

Exercícios:

1. (B)

2. (E)

3. (C)

EQUAÇÕES E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TEMAS

1. A linguagem da Matemática

Introdução

Nesta Unidade, você vai aprofundar um assunto já conhecido: as equações. Depois de estudar alguns métodos de solução, você será capaz de resolver problemas que envolvem proporcionalidade e Geometria.

Você também vai ver as relações direta e inversamente proporcionais e como resolvê-las com equações, por meio da Propriedade Fundamental das Proporções (PFP). Além disso, vai estudar os ângulos e alguns problemas relacionados a eles, usando equações para resolvê-los.

A linguagem da Matemática — TEMA 1

Neste Tema, você vai aprender estratégias que permitem traduzir uma situação-problema em linguagem algébrica e resolvê-la, usando equações com uma incógnita, assim como identificar grandezas direta ou inversamente proporcionais, para resolvê-las utilizando estratégias variadas, inclusive a regra de três.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Tradicionalmente, as equações são importantes para a Matemática e também têm sido muito utilizadas nas outras ciências.

- Em que situações do dia a dia ou em quais outras disciplinas, você precisa descobrir o valor de uma variável desconhecida?

- No cotidiano, nos meios de comunicação ou em outras disciplinas, você já encontrou expressões com variáveis, números e símbolo de igualdade?

Procure se lembrar de algumas situações onde profissionais utilizam fórmulas matemáticas.

O uso da matemática na resolução de problemas

A Matemática é uma importante ferramenta para a resolução de problemas, sejam eles de natureza numérica ou geométrica. Nesta Unidade, você vai retomar algumas situações em que são usados **símbolos**, **expressões** e **equações**.

É praticamente impossível listar todas as atividades profissionais que utilizam a Matemática e sua linguagem para expressar relações e resolver problemas.

Como introdução, considere o seguinte exemplo: uma corrida de táxi, cujo preço é calculado com base na distância percorrida entre um ponto de partida e um ponto de chegada. Observe a descrição dessa situação em linguagem matemática:

$$(I)\ P = 5d + 7$$

Nessa equação, considere que: **P** é o preço da corrida (em R$); 5 é o valor do quilômetro percorrido (em R$/km); **d** é a distância percorrida (em km); e **7** representa a bandeirada (tarifa fixa, em R$, registrada assim que o taxímetro é acionado).

Então, para calcular o valor de uma corrida, na qual o táxi percorreu 10 km, basta substituir a variável **d** por **10** na equação (I). Portanto, se $P = 5 \cdot \mathbf{10} + 7$, então $P = 57$. Ou seja, o preço da corrida foi de R$ 57,00.

Agora, imagine uma situação em que você sabe o valor da corrida, mas desconhece a distância percorrida. Por exemplo, se a corrida custa R$ 27,00, basta substituir a variável **P** por **27** na seguinte equação:

$$(II)\ 27 = 5d + 7$$

Se **27** $= 5d + 7$, então a distância percorrida corresponde a 4 km, como se pode verificar: $5 \cdot 4 + 7 = 20 + 7 = 27$.

As duas situações descritas anteriormente foram transformadas em **equações**, porque duas condições puderam ser satisfeitas: a relação de **igualdade** e a presença de **variáveis**, conhecidas também como **incógnitas**.

VOCÊ SABIA?

A palavra *incógnita* também é usada em outras situações.

Pense na seguinte frase: "O cantor popular Alberto Roberto foi à praia de óculos escuros e peruca para ficar incógnito, evitando, assim, o assédio das fãs". Nessa frase, ficar *incógnito* significa que o cantor está disfarçado para não ser reconhecido. A palavra *incógnita* tem origem no verbo latino *cognoscere*, que significa *conhecer*. Já que o prefixo **in-** tem o sentido de negação, *incógnito* quer dizer *não conhecido*. Os matemáticos usam o termo *incógnita* para se referir a um valor não conhecido e que, em geral, deve ser descoberto.

Há muitos métodos que possibilitam a descoberta dos valores das incógnitas de uma equação, e é esse o assunto que você vai estudar nesta Unidade.

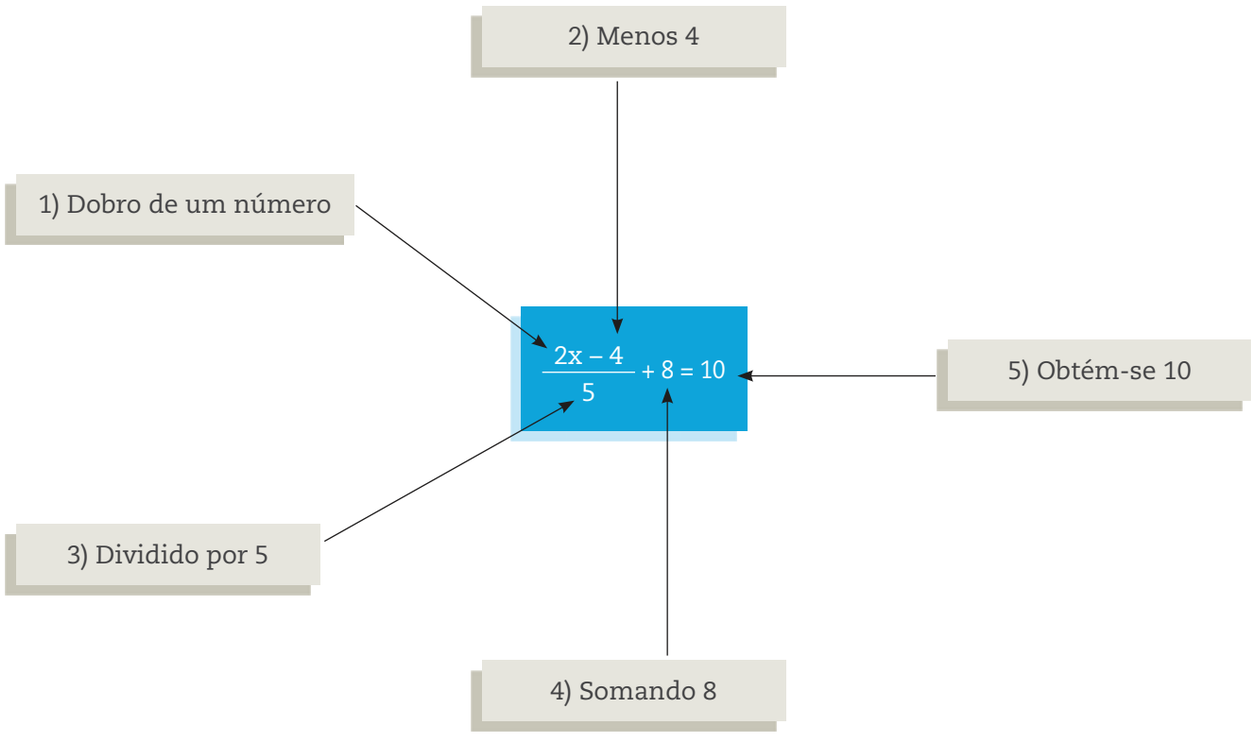
Estudando métodos de solução de equações

Para iniciar, considere o seguinte problema de adivinhação:

> O dobro de um número menos 4 é dividido por 5. Somado a 8, dá 10. Qual é esse número?

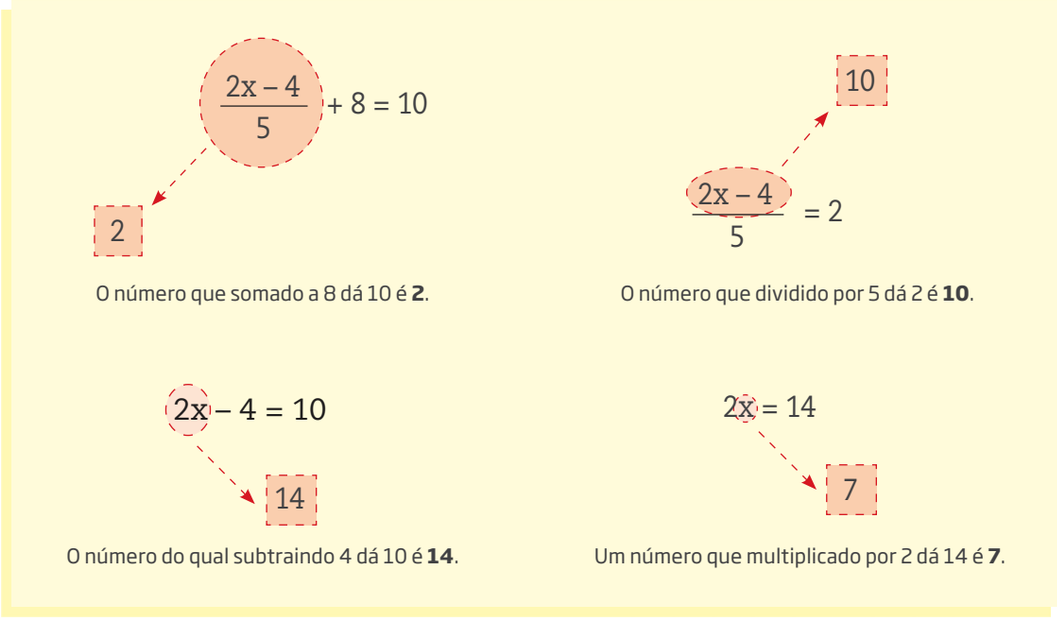
Uma estratégia para descobrir o número procurado é "chutar" valores e verificar se eles satisfazem às condições. Os matemáticos chamam essa estratégia de **tentativa e erro**, considerada legítima quando aplicada com critério. Independentemente de tentativas de adivinhação, há outras maneiras mais eficientes de solucionar um problema, quando se utiliza a **linguagem matemática**. Nesse caso, letras do alfabeto são usadas para representar valores desconhecidos.

Se **x** corresponde ao valor que você pretende descobrir, a expressão que representa o problema descrito anteriormente é a seguinte:



Quando transformado em **equação**, o problema é expresso em linguagem matemática. Assim, resolvendo a equação, você poderá encontrar a solução para ele.

Veja que é possível descobrir o valor de **x** por meio de raciocínio lógico, desenvolvendo o passo a passo, de trás para frente (do resultado da equação para a incógnita). Acompanhe:



Sempre que você achar que encontrou a solução, verifique se o número encontrado satisfaz a todas as condições do problema e se ele produz a resposta esperada.

Substituindo a incógnita **x** por **7**, observe:

$$\frac{2 \cdot 7 - 4}{5} + 8 = \frac{14 - 4}{5} + 8 = \frac{10}{5} + 8 = 2 + 8 = 10$$

ATIVIDADE 1 Descobrindo o "xis" da questão

1 O quádruplo de um número é 300. Qual é esse número?

2 O triplo do antecessor (aquele que vem logo antes) de um número é 24. Qual é esse número?

3 A metade do sucessor (aquele que vem logo depois) de um número é 15. Qual é esse número?

4 João pensou em um número, calculou seu triplo e adicionou 8 ao resultado; em seguida, dividiu tudo por 5 e subtraiu 10, obtendo como resultado o número 0 (zero). Qual foi o número pensado por João?

5 A fórmula que fornece o preço de uma corrida de táxi em função da distância percorrida é $P = 3{,}5d + 4{,}5$.

a) Quanto vai custar uma corrida de 8 km?

b) Qual foi a distância percorrida, sabendo que a corrida custou R$ 50,00?

6 Um número somado à sua metade é igual a 120. Que número é esse?

7 Somando um número à sua terça parte, o resultado é 124. Qual é esse número?

Usando equações para resolver problemas de regra de três

Em problemas que envolvem o conceito de proporção, há sempre uma igualdade entre duas razões, formadas por três variáveis conhecidas e uma desconhecida. Tais problemas podem ser resolvidos por meio de **regra de três**, que nada mais é do que uma estratégia para descobrir a variável desconhecida.

Se uma empresa tem 2 funcionárias para cada 3 funcionários do sexo masculino, é possível dizer que a razão entre mulheres e homens é de "2 para 3". Em linguagem matemática, essa comparação é expressa pela notação fracionária $\frac{2}{3}$.

Uma proporção, por sua vez, é uma igualdade de duas razões: por exemplo, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, ou genericamente $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ com b e d $\neq 0$.

Para saber mais sobre proporções e regra de três, analise os exemplos a seguir.

• **Exemplo 1**: A Constituição brasileira determina que a bandeira nacional deva ter uma razão de 14 por 20, em suas dimensões. Ou seja, se o lado menor tiver 14 cm, o lado maior terá 20 cm; porém, se o lado menor medir 7 cm, o lado maior deverá ter 10 cm. Observe que, nas duas situações apresentadas, a proporção entre os lados é idêntica, afinal $\frac{14}{20}$ equivale a $\frac{7}{10}$.

Observe as três bandeiras a seguir. Qual delas mantém as proporções oficiais? Caso sinta necessidade, pode usar uma régua para medi-las.

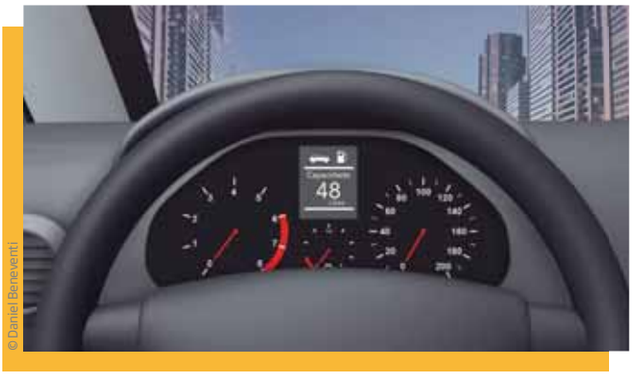


Daniel Beneventi

Agora, suponha que uma costureira deva confeccionar uma bandeira do Brasil. Se ela utilizar 3 m de tecido para o lado maior, qual será a medida do lado menor? Para resolver o problema, você pode utilizar a seguinte equação, em que **x** representa o lado menor da bandeira.

$$(I)\ \frac{14}{20} = \frac{x}{3}$$

• **Exemplo 2**: Se o tanque de combustível de um veículo tem capacidade para 48 litros e a taxa média de consumo é de 2 litros a cada 23 km rodados, quantos quilômetros podem ser percorridos com o tanque cheio?



© Daniel Beneventi

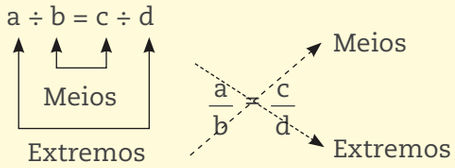
Para responder à questão, é preciso calcular o valor de **x** (em quilômetros) que satisfaz a proporção:

$$(II)\ \frac{2}{23} = \frac{48}{x}$$

Veja que, tanto no exemplo da bandeira como no exemplo do consumo de combustível, as proporções (I) e (II) são equações em que o **x** é a variável desconhecida.

Para resolver o problema da bandeira e o do consumo de combustível, uma solução é aplicar a Propriedade Fundamental das Proporções (PFP).

Em uma proporção, é possível nomear seus termos. Observe:



A PFP diz que "o produto dos meios é igual ao produto dos extremos".

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

$$\text{(I)}\ \frac{14}{20} = \frac{x}{3} \Rightarrow 14 \cdot 3 = 20x \Rightarrow x = 42 \div 20 \Rightarrow x = 2{,}1$$

Se o lado maior do retângulo da bandeira do Brasil tiver 3 m, o lado menor deverá ter 2,1 m.

$$\text{(II)}\ \frac{2}{23} = \frac{48}{x} \Rightarrow 2x = 23 \cdot 48 \Rightarrow 2x = 1.104 \Rightarrow x = 1.104 \div 2 \Rightarrow x = 552$$

Com 48 litros de combustível, o automóvel poderá percorrer 552 quilômetros.

Nos problemas apresentados anteriormente, você pôde observar que as grandezas sempre aumentam ou diminuem na mesma proporção, o que significa que elas são **diretamente proporcionais**.

Em certos casos, por outro lado, você pode notar que há grandezas que aumentam enquanto outras diminuem proporcionalmente, ou seja, elas são **inversamente proporcionais**.

Veja alguns exemplos:

• Para produzir determinada quantidade de peças, uma fábrica usa 6 máquinas e conclui a produção em 8 dias. Para produzir o mesmo número de peças na metade do tempo, ou seja, em 4 dias, a fábrica vai precisar do dobro de máquinas. Veja que, nesse caso, para produzir o mesmo número de peças em metade do tempo, é preciso dobrar o número de máquinas.

• Para viajar de uma cidade à outra a uma velocidade média de 80 quilômetros por hora (km/h), um automóvel leva 3 horas. Diminuindo a velocidade para 60 km/h em média, qual será o tempo de percurso?

Velocidade		Tempo
80 km/h	→	3 h
60 km/h	→	x h

Como a velocidade e o tempo de percurso de um trecho são grandezas inversamente proporcionais, quanto maior for a velocidade do automóvel, menor será o tempo de percurso, e essa diminuição é proporcional. Por outro lado, ao diminuir a velocidade, o tempo aumenta proporcionalmente.

Essa relação evidencia uma proporção inversa, representada por $\frac{80}{60} = \frac{x}{3}$, na qual a razão entre os tempos de percurso aparece invertida. Observe a resolução do problema:

$$\frac{80}{60} = \frac{x}{3} \Rightarrow 80 \cdot 3 = 60x \Rightarrow 240 = 60x \Rightarrow x = 240 \div 60 \Rightarrow x = 4$$

Então, se a velocidade média for de 60 km/h, a viagem deve durar 4 h.

MOMENTO CIDADANIA

O sistema eleitoral brasileiro utiliza o voto para realizar a eleição de vereadores, prefeitos, deputados estaduais e federais, governadores, senadores e presidente. Além de fortalecer a democracia, a eleição é também um instrumento que faz uso do conceito de proporção.

Assim, em uma eleição, a quantidade de candidatos que um partido pode eleger é proporcional ao número de votos que o partido recebe. Ou seja, quanto mais votos um partido receber, maior será o número de cadeiras que ele terá na Câmara. Uma das vantagens desse sistema, aplicado inicialmente na Bélgica, consiste em garantir a participação de grupos minoritários.

ATIVIDADE 2 Equações em proporções

1 Calcule o valor da variável **x** nas seguintes proporções:

a) $\frac{15}{24} = \frac{x}{80}$

b) $\frac{14}{24} = \frac{35}{x}$

c) $\frac{x}{32} = \frac{15}{96}$

d) $\frac{9}{x} = \frac{18}{50}$

2 Uma fábrica produz um lote de 600 peças em 3 horas, com 4 máquinas funcionando.

a) Se a fábrica utilizasse a mesma quantidade de máquinas por 8 horas, quantas peças seriam produzidas?

b) Se a fábrica utilizasse 6 máquinas pelas mesmas 3 horas, quantas peças seriam produzidas?

c) Se a fábrica quisesse produzir as mesmas 600 peças em 1h30, quantas máquinas seriam necessárias?

3 Uma empresa tem 360 funcionários. Sabendo que 2 em cada 5 utilizam o metrô, qual é o total de funcionários que usa esse meio de transporte?

4 Dois amigos formaram uma sociedade para montar um negócio. O primeiro investiu a quantia de R$ 1.200,00, e o segundo, a quantia de R$ 1.800,00. Ao final de um período, tiveram um lucro de R$ 6.000,00, que foi dividido para cada sócio, de forma proporcional ao capital investido por eles. Quanto do lucro cada um recebeu?

5 Um automóvel viaja entre São Paulo e Rio de Janeiro a uma velocidade média de 80 km/h, e leva 5 horas para fazer esse trajeto. Qual é a distância aproximada que o automóvel percorreu?

6 Em uma prova de ciclismo, o campeão percorreu a distância de 120 km em 4 horas. Qual foi a velocidade média do campeão durante essa prova?

ATIVIDADE 3 O epitáfio de Diofanto

1 Um dos últimos destaques da matemática grega foi Diofanto, que viveu no século III d.C. Nascido na cidade de Alexandria, local da principal biblioteca científica da Antiguidade, Diofanto foi pioneiro ao utilizar letras do alfabeto como variáveis para resolver problemas, o que fez que muitos matemáticos passassem a considerá-lo como o pai da Álgebra.

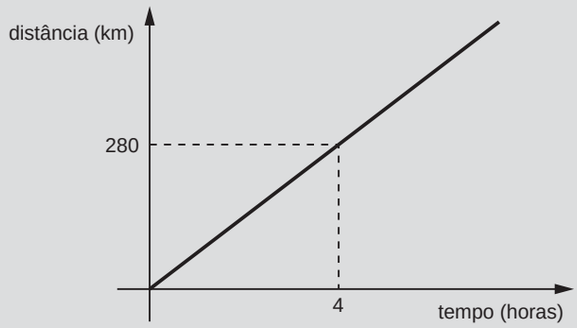
O pouco que se sabe sobre sua vida ficou gravado em seu túmulo:

> Esta é a admirável lápide onde descansa Diofanto! Ela permite saber a idade dele por meio da arte aritmética: Deus quis que, da sua vida, a infância ocupasse uma sexta parte. Decorreu mais um duodécimo até que a barba lhe cobriu o rosto. Em seguida, casou-se e passou um sétimo de sua vida sem filhos. Cinco anos depois, finalmente teve um menino. Este, adorado, mas sem sorte, viveu apenas a metade do tempo de seu pai. Tentando atenuar o seu pesar com a ciência dos números, Diofanto viveu ainda mais quatro anos.

Com base nesse epitáfio, quantos anos teria vivido Diofanto?

DESAFIO

O gráfico desenhado abaixo representa uma relação entre a grandeza tempo (em horas) e distância percorrida (em quilômetros).



As grandezas distância e tempo, nesse caso, são

a) não proporcionais.
b) inversamente proporcionais.
c) diretamente proporcionais.
d) proporcionais, mas a primeira ao quadrado da segunda.

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/8ª%20série%20EF/1_Manhã/Prova-MAT-8EF-Manha.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Descobrindo o "xis" da questão

1 O número que multiplicado por 4 dá 300 é 75, porque $4 \cdot 75 = 300$.

Usando equações, a resolução fica da seguinte maneira:

$$4x = 300 \Rightarrow x = 300 \div 4 \Rightarrow x = 75$$

2 O número que multiplicado por 3 dá 24 é 8, logo $x - 1 = 8$; o número que subtraindo 1 dá 8 é 9.

Também pode ser resolvido em forma de equação:

$$3(x - 1) = 24 \Rightarrow x - 1 = 24 \div 3 \Rightarrow x - 1 = 8 \Rightarrow x = 8 + 1 \Rightarrow x = 9$$

3 O número que dividido por 2 dá 15 é 30, logo $x + 1 = 30$; o número que somando 1 dá 30 é o 29.

Outra forma de resolver é: $\frac{x + 1}{2} = 15 \Rightarrow x + 1 = 30 \Rightarrow x = 30 - 1 \Rightarrow x = 29$

4 $\frac{3x + 8}{5} - 10 = 0$

Contudo, também pode ser resolvido dessa forma: o número de que se subtrai 10 e dá 0 é 10; o número que dividido por 5 dá 10 é 50; o número que somado a 8 dá 50 é 42; e o número cujo triplo é 42 é 14. O número que João pensou foi 14.

HORA DA CHECAGEM

5

a) $P = 3{,}5 \cdot 8 + 4{,}5 = 28 + 4{,}5 = 32{,}5 \Rightarrow$ R$ 32,50

A corrida de 8 km vai custar R$ 32,50.

b) $50 = 3{,}5d + 4{,}5 \Rightarrow 50 - 4{,}5 = 3{,}5d \Rightarrow 45{,}5 = 3{,}5d \Rightarrow d = 45{,}5 \div 3{,}5 \Rightarrow d = 13$

A corrida de R$ 50,00 corresponde a um percurso de 13 km.

6 Suponha que o número escolhido seja 40, de forma que 40 + 20 = 60, ou seja, não resolve o problema. No entanto, 60 é metade de 120, então o dobro de 40 deve resolver o problema: 80 + 40 = 120.

A equação correspondente a esse enunciado é:

$$x + \frac{x}{2} = 120 \Rightarrow \frac{2x}{2} + \frac{x}{2} = 120 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 120 \Rightarrow 3x = 120 \cdot 2 \Rightarrow 3x = 240 \Rightarrow x = 240 \div 3 \Rightarrow x = 80$$

É interessante revisitar o problema depois que você finalizar a próxima Unidade.

7 Supondo que o número seja 90, como a terça parte de 90 é 30, tem-se 90 + 30 = 120, ou seja, o valor é menor que 124. Então, tentando 93, que é um número maior, cuja terça parte é 31, tem-se 93 + 31 = 124. Assim, o número é 93.

Resolvendo na forma de equação:

$$x + \frac{x}{3} = 124 \Rightarrow \frac{3x}{3} + \frac{x}{3} = 124 \Rightarrow \frac{4x}{3} = 124 \Rightarrow 4x = 124 \cdot 3 \Rightarrow 4x = 372 \Rightarrow x = 372 \div 4 \Rightarrow x = 93$$

Atividade 2 - Equações em proporções

1

a) $15 \cdot 80 = 24x \Rightarrow 1.200 = 24x \Rightarrow x = 1.200 \div 24 \Rightarrow x = 50$

b) $14x = 24 \cdot 35 \Rightarrow 14x = 840 \Rightarrow x = 840 \div 14 \Rightarrow x = 60$

c) $96x = 32 \cdot 15 \Rightarrow 96x = 480 \Rightarrow x = 480 \div 96 \Rightarrow x = 5$

d) $9 \cdot 50 = 18x \Rightarrow 450 = 18x \Rightarrow x = 450 \div 18 \Rightarrow x = 25$

2

a) A relação entre as grandezas “número de peças” e “horas” é diretamente proporcional: mais horas implica em mais peças. Logo, 600 peças está para 3 horas, assim como **x** peças está para 8 horas:

$$\frac{600}{3} = \frac{x}{8} \Rightarrow 3x = 600 \cdot 8 \Rightarrow 3x = 4.800 \Rightarrow x = \frac{4.800}{3} \Rightarrow x = 1.600 \text{ peças}$$

b) A relação produção de peças e quantidade de máquinas é diretamente proporcional: mais máquinas implica em mais peças produzidas.

Desse modo, 600 peças está para 4 máquinas, assim como **x** peças está para 6 máquinas:

$$\frac{600}{4} = \frac{x}{6} \Rightarrow 4x = 600 \cdot 6 \Rightarrow 4x = 3.600 \Rightarrow x = \frac{3.600}{4} \Rightarrow x = 900 \text{ peças}$$

c) Nesse caso, a relação é inversamente proporcional: mais máquinas implica em menos tempo. Como o tempo se reduz à metade, a razão de diminuição do tempo é $\frac{1}{2}$, portanto será necessário o dobro de máquinas: 8.

3 A proporção é "2 está para 5, assim como **x** está para 360":

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{360} \Rightarrow 5x = 720 \Rightarrow x = 144$$

Assim, nessa empresa, 144 pessoas utilizam o metrô como meio de transporte.

4 Nesse caso, tem-se uma proporcionalidade direta em que, do total do capital investido, o primeiro entrou com $\frac{2}{5}$, e o segundo, com $\frac{3}{5}$. O problema pode ser resolvido com uma regra de três em cada caso.

Sócio 1: a proporção é 2 está para 5, assim como **x** está para 6.000.

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{6.000} \Rightarrow 5x = 12.000 \Rightarrow x = \frac{12.000}{5} \Rightarrow x = 2.400$$

Sócio 2: a proporção é 3 está para 5, assim como **y** está para 6.000.

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{6.000} \Rightarrow 5y = 18.000 \Rightarrow y = \frac{18.000}{5} \Rightarrow y = 3.600$$

Então, o primeiro sócio fica com R$ 2.400,00, e o segundo, com R$ 3.600,00.

5 Esse problema trata de uma proporcionalidade direta: 80 km está para 1 hora, assim como **x** km está para 5 horas.

$$\frac{80}{1} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 400 \text{ km}$$

6 Para descobrir a velocidade média do campeão, é necessário calcular a distância que ele percorreu em 1 hora, ou seja, 120 km está para 4 horas, assim como **x** km está para 1 hora.

$$\frac{120}{4} = \frac{x}{1} \Rightarrow 4x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{4} \Rightarrow x = 30$$

Portanto, o campeão percorreu em 1 hora uma média de 30 km, ou seja, sua velocidade média foi de 30 km/h.

Atividade 3 - O epitáfio de Diofanto

1 Para saber quantos anos viveu Diofanto, basta equacionar o epitáfio escrito em sua lápide e resolver a equação.

Como é seu tempo de vida o que se quer descobrir, tem-se aí a incógnita **x**. Durante a leitura do problema, é preciso relacionar a **x** toda informação que se refira às partes de sua vida.

HORA DA CHECAGEM

Assim:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \Rightarrow x = \frac{2x}{12} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{6x}{12} + 9 \Rightarrow x = \frac{9x}{12} + \frac{x}{7} + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{84x}{84} = \frac{63x}{84} + \frac{12x}{84} + 9 \Rightarrow \frac{84x}{84} - \frac{75x}{84} = 9 \Rightarrow \frac{9x}{84} = 9 \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 84}{9} \Rightarrow x = 84$$

O resultado dessa equação é que Diofanto viveu 84 anos.

Desafio

Alternativa correta: **c**. A relação tempo *versus* distância é diretamente proporcional, isto é, à medida que o tempo aumenta, a distância percorrida também aumenta proporcionalmente.

Registro de dúvidas e comentários

Equações de 1º e 2º graus

Resolver uma equação (IGUALDADE) significa encontrar o valor da variável desconhecida que satisfaça a igualdade.

Equações do 1º grau: É toda equação do tipo $a \cdot x + b = 0$. Para resolvê-las, isolamos a variável x.

Exemplos:

i) $3x-6=0$

$3x=6$

$x=\frac{6}{3}$

$x=2$

$S=\{2\}$

ii) $3(x-2)=2(2x+4)$

$3x-6=4x+8$

$3x-4x=8+6$

$-x=14(-1)$

$x=-14$

$S=\{-14\}$

iii) $\frac{x+1}{3}-2=\frac{2(x+4)}{5}$

$\frac{5(x+1)-30=3\cdot 2(x+4)}{15}$

$5x+5-30=6(x+4)$

$5x-25=6x+24$

$5x-6x=24+25$

$-x=49(-1)$

$x=-49$

$S=\{-49\}$

Equações do 2° grau: é toda equação do tipo $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. Para resolvê-las, utilizamos a fórmula de Bháskara:

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}, onde\ \Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$$

Exemplos:

i) $x^2-3x+2=0\rightarrow(a=1;b=-3;c=2)$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1$

$$X=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow\begin{cases}X_1=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2\\X_2=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

$S=\{1,2\}$

$$ii) x^2 - 4 = 0 \rightarrow (a = 1; b = 0; c = -4)$$
$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16$$
$$X = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 4}{2} = \pm 2$$
$$S = \{-2, 2\}$$

$$iii) x^2 + 2x = 0 \rightarrow (a = 1; b = 2; c = 0)$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4$$
$$X = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ X_2 = \frac{-2-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$
$$S = \{-2, 0\}$$

$$iv) 5x^2 + x + 2 \rightarrow (a = 5; b = 1; c = 2)$$
$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 1 - 40 = -39 \Rightarrow \nexists x_1 \text{ e } x_2 \in \Re$$
$$S = \phi$$

$$v) x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (a = 1; b = -6; c = 9)$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$
$$X = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$
$$S = \{3\}$$

Funções



Tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento é comum o surgimento do conceito de ***função***.

Antes da definição propriamente matemática, vamos analisar a seguinte situação:

Numa realidade diferente da nossa havia uma vila ninja chamada Konoha, onde morava um ninja não muito esperto, mas muito corajoso chamado Uzumaki Naruto, que por sua vez era apaixonado por Haruno Sakura. O salário de Naruto, como ninja, não era tão bom, e podia ser calculado da seguinte forma:

"Uma parte fixa de R$ 600,00 mais R$ 60,00 por cada ninja inimigo derrotado por ele".

Por outro lado, Sakura, que além de ninja era médica, recebia um bom salário, que podia ser calculado da seguinte forma:

"Uma parte fixa de R$ 300,00 mais R$ 120,00 por cada paciente tratado por ela".

Como Naruto não entende essas leis matemáticas, muitas são as dúvidas que o atormentam. Sendo assim, com base no texto dado, faça o que se pede:

a) Preencha a tabela abaixo, que corresponde aos dados informados de Naruto.

Inimigos derrotados	*0*	*1*	*2*	*3*	*5*	*10*	*15*	*20*
Salário								

b) Preencha a tabela abaixo, que corresponde aos dados informados de Sakura:

Salário	*300*	*420*	*660*	*900*	*1260*	*1500*	*1740*	*2700*
Pacientes tratados								

c) Podemos dizer que o salário de Naruto depende do número de ninjas derrotados por ele?

d) Podemos dizer que o número de pacientes tratados depende do valor do salário de Sakura?

f) Represente a situação de Naruto por meio de um gráfico, posicionando o número de inimigos no eixo das abscissas;

h) Existe uma expressão algébrica que permita determinar o salário de Naruto partindo do número de inimigos derrotados? Qual é essa expressão?

j) Quantas e quais as formas de representação das situações utilizadas nesta atividade?

Definição

Na situação dada, o salário de Naruto ***depende*** da quantidade de inimigos derrotados por eles. Desta forma, podemos dizer que o salário de Naruto está em ***função*** da quantidade de inimigos derrotados.

Uma função sempre será obtida por uma relação existente entre dois conjuntos, ou entre duas grandezas, ou ainda entre duas variáveis.

No caso de Naruto, seu salário representa a ***variável dependente*** (pois depende da quantidade de inimigos derrotados), enquanto que o número de inimigos derrotados representa a ***variável independente***.

O conjunto formado por todos os valores da variável independente é chamado ***domínio da função*** e representado por D(f); o conjunto que contém todos os valores da variável dependente é chamado ***contradomínio da função*** e representado por CD(f).

Vale ressaltar que nem toda relação entre conjuntos representa uma função. Intuitivamente, uma função é uma maneira de associar a cada valor x do domínio um ÚNICO valor f(x) do contradomínio.

Observe:

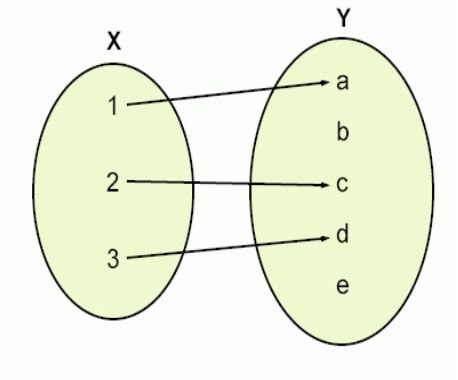
Inimigos derrotados	0	1	2	3	5	10	15	20	n
Salário	600	660	720	780	900	1200	1500	1800	600+60.n

No caso da tabela, todos os valores da 1° linha (variável independente) formam o domínio da função, ou seja, D(f) = { 0, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, n }, enquanto que o contradomínio da função pode ser dado por CD(f) = { 600, 660, 720, 780, 900, 1200, 1500, 1800, 600+60n }, que contém todos os elementos da 2° linha (variável dependente).

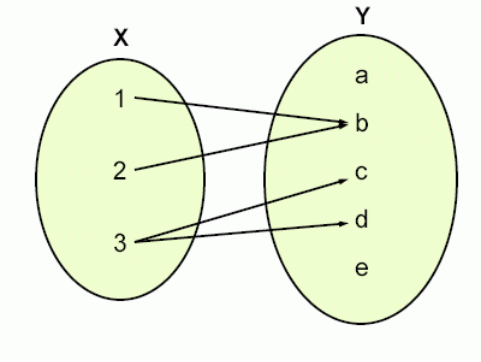
Representação

Uma função pode ser representada por várias formas diferentes. Vejamos:

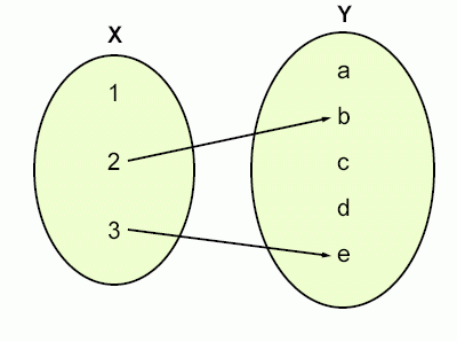
DIAGRAMAS



Neste caso temos uma relação entre os valores de X e Y. Como todos os valores de X possuem um único correspondente (imagem) em Y, temos uma função de X em Y.
Nesta função:
D(f) = { 1, 2, 3 }
CD(f) = { a, b, c, d, e }
Conjunto imagem da função:
Im(f) = { a, c, d }



Neste caso, a relação **não representa uma função**, *pois o elemento 3, de X, possui duas imagens (correspondente) em Y.*



Neste caso, a relação **não representa uma função**, *pois o elemento 1, de X, não possui imagem em Y.*

TABELAS

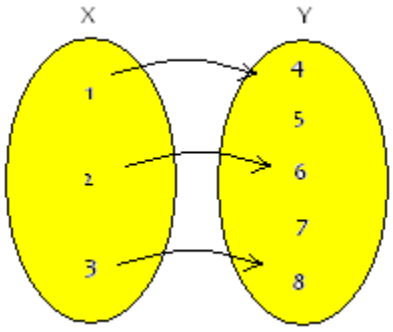
Na situação apresentada no início, cada tabela a ser preenchida representa uma função:

Salário	300	420	660	900	1260	1500	1740	2700
Pacientes tratados	0	1	3	5	8	10	12	20

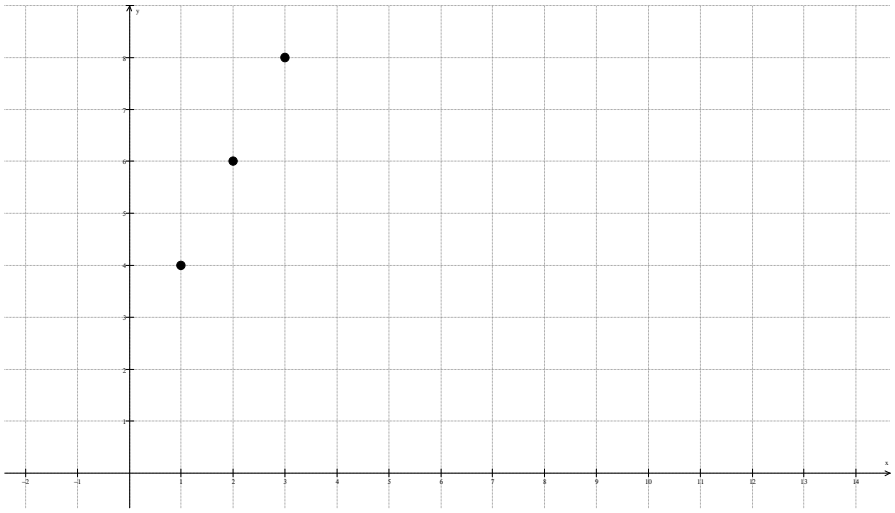
Neste caso:
D(f)= { 300, 420, 660, 900, 1260, 1500, 1740, 2700, n }
CD(f)= { 0, 1, 3, 5, 8, 10, 12, 20, (n – 300)/120 }
Im(f)=CD(f)

GRÁFICOS

Numa função, cada correspondência pode ser representada por um par ordenado (x, y), que por sua vez pode ser representado por um ponto P(x, y) no plano cartesiano:



Ao lado, temos uma função de X em Y formada por três correspondências, que podem ser representadas pelo gráfico abaixo:



SITUAÇÕES-PROBLEMA

O problema de abertura da apostila exemplifica bem essa forma de representação. Com a boa utilização da língua portuguesa, uma situação de dependência entre duas grandezas pode ser apresentada. Vejamos um exemplo:



Bob Esponja, feliz e simpática esponja do mar, trabalha numa lanchonete chamada Siri Cascudo. O salário de Bob Esponja depende da quantidade de hambúrgueres preparados por ele, ou seja, seu salário está em função dessa quantidade produzida e é calculado da seguinte forma: uma parte fixa de R$ 500,00 mais R$ 4,00 por cada hambúrguer preparado.

De acordo com a situação-problema descrita acima, se Bob Esponja preparar, em determinado mês, 150 hambúrgueres, seu salário será de R$ 1100,00.

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Com base na situação-problema de Bob Esponja, percebemos que:

Salário = parte fixa + R$ 4,00 por cada hambúrguer

Considerando *S = salário* e *H = quantidade de hambúrgueres*, podemos escrever:

$$S = 500 + 4 \cdot H$$

que é a fórmula matemática que nos permite resolver qualquer problema referente a essa situação.

Como exemplo, podemos resolver o seguinte questionamento:

a) Se Bob Esponja, neste mês, recebeu R$ 1000,00, quantos hambúrgueres preparou? Neste caso, S = 1000 e H =?

$$S = 500 + 4H$$
$$1000 = 500 + 4H$$
$$1000 - 500 = 4H$$
$$500 = 4H$$
$$\frac{500}{4} = H$$
$$125 = H$$

Resolva

01. Bob Esponja resolve abastecer seu barco em um posto de combustíveis onde cada litro de gasolina custa R$ 4,00. Sabendo que o frentista cobra, ainda, R$ 5,00 de gorjeta:

a) Escreva uma fórmula matemática que representa essa situação;

b) Se Bob Esponja comprar 34 litros, quanto pagará ao final?

c) Se pagou R$ 45,00, quantos litros de gasolina comprou?

02. Naruto mora sozinho, por isso costuma se alimentar no Ichiraku Lámen. Neste restaurante, a cada refeição Naruto tem uma despesa de R$ 5,00 por tigela de lámen mais R$ 3,00 de gorjeta.

a) Neste caso, podemos dizer que a despesa de Naruto está em função da quantidade de tigelas de lámen consumidas por ele. O que isso significa?

b) Quais são as variáveis dessa função?

c) Qual é a variável dependente?

d) Qual é a variável independente?

e) Escreva a lei da função.

f) Se em determinado almoço Naruto consumiu 16 tigelas de lámen, qual será o valor de sua despesa?

g) Se em seu aniversário Naruto gastou R$ 103,00, quantas tigelas de lámen foram consumidas?

03. Sakura é lenhadora e como pagamento mensal recebe R$ 510,00 na carteira mais R$ 7,00 por cada árvore derrubada.

a) Quais são as variáveis dessa função?

b) Qual é a variável dependente?

c) Qual é a variável independente?

d) Escreva a lei da função.

e) Se em determinado mês Sakura derrubar 123 árvores, qual será o valor de seu salário?

f) Se no mês de maio Sakura recebeu R$ 4710,00 de salário, quantas árvores ela derrubou?

g) Se em novembro Sakura não derrubou árvores, quanto recebeu de salário?

04. Sasuke é domador de serpentes e recebe R$ 1500,00 por cada serpente domesticada por ele.

a) O salário de Sasuke depende de que?

b) Qual é a variável independente?

c) Escreva a lei da função.

d) Se Sasuke domesticar 12 serpentes, quanto receberá em dinheiro?

e) Se Sasuke recebeu R$ 12000,00 em julho, quantas serpentes domesticou neste mês?

f) Se Sasuke não conseguir domar serpentes em dezembro, qual será o valor de seu salário neste mês?

GABARITO

Situação Problema

a)

0	***1***	***2***	***3***	***5***	***10***	***15***	***20***
600	*660*	*720*	*780*	*900*	*1200*	*1500*	*1800*

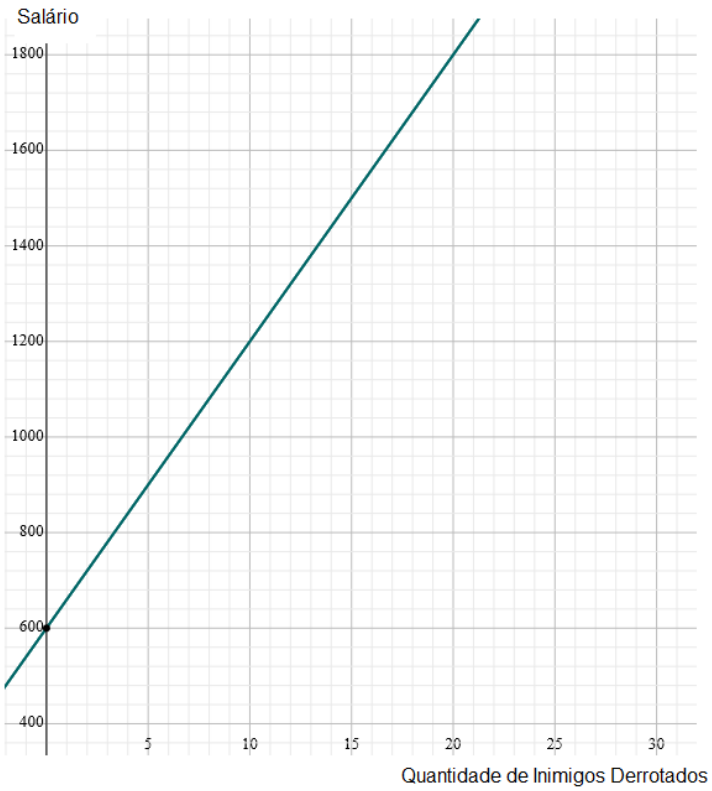
b)

300	***420***	***660***	***900***	***1260***	***1500***	***1740***	***2700***
0	*1*	*3*	*5*	*8*	*10*	*12*	*20*

c) Sim

d) Para preenchimento da tabela da letra "b)", sim.

f)



h) Sim. Salário = 600 fixos + 60 por inimigo derrotado, ou seja,

$$Y = 600 + 60\,x$$

j) A situação foi representada por 4 maneiras diferentes: pelo texto dado (contexto), pela tabela, pelo gráfico e pela fórmula algébrica.

01.

a) y = 4x + 5

b) $y = 4 \cdot 34 + 5 = 136 + 5 = 141\ reais$

c) $4 \cdot x + 5 = 45 \ \rightarrow 4x = 40 \ \rightarrow x = 10\ litros$

02.

a) Que o valor da despesa DEPENDE da quantidade de lámen consumida por Naruto.

b) Despesa (y) e quantidade de tigelas de lámen (x).

c) Despesa (y)

d) Quantidade de tigelas de lámen (x).

e) $y = 5 \cdot x + 3$

f) $y = 5 \cdot 16 + 3 = 80 + 3 = 83\ reais$

g) $5 \cdot x + 3 = 103 \ \rightarrow 5x = 100 \ \rightarrow x = 20\ tigelas\ de\ lámen$

03.

a) Pagamento mensal (y) e quantidade de árvores derrubadas (x).

b) Pagamento mensal (y).

c) Quantidade de árvores derrubadas (x).

d) $y = 7 \cdot x + 510$

e) $y = 7 \cdot 123 + 510 = 861 + 510 = 1371\ reais$

f) $7 \cdot x + 510 = 4710 \ \rightarrow 7x = 4200 \ \rightarrow x = 600\ árvores\ derrubadas$

g) $y = 7 \cdot 0 + 510 = 0 + 510 = 510\ reais$

04.

a) Da quantidade de serpentes domadas.

b) Quantidade de serpentes domadas (x).

c) $y = 1500 \cdot x$

d) $y = 1500 \cdot 12 = 18000\ reais$

e) $1500 \cdot x = 12000 \ \rightarrow x = 12000 \div 1500 = 8\ serpentes\ domadas$

f) $y = 1500 \cdot 0 = 0\ reais$

Neste tema, você aprenderá a reconhecer a função quadrática, identificar suas variáveis e coeficientes e esboçar o gráfico que a representa.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já ouviu falar que alguém precisa calcular a área máxima de um terreno, de uma sala ou algo assim? Ou já viu em notícias referências ao lucro máximo ou lucro mínimo de alguma empresa?

As funções quadráticas são utilizadas para realizar esses cálculos.

Características da função quadrática

Chama-se **função quadrática** toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** coeficientes reais e **a** diferente de 0.

São vários os contextos e as situações em que se utilizam as funções quadráticas.

Veja a imagem da Igreja da Pampulha, em Belo Horizonte (MG). Esse foi um projeto arquitetônico concluído em 1945, por Oscar Niemeyer (1907-2012). Observe como são interessantes seus arcos em forma de **parábola** – a curva que corresponde ao gráfico de uma função quadrática.

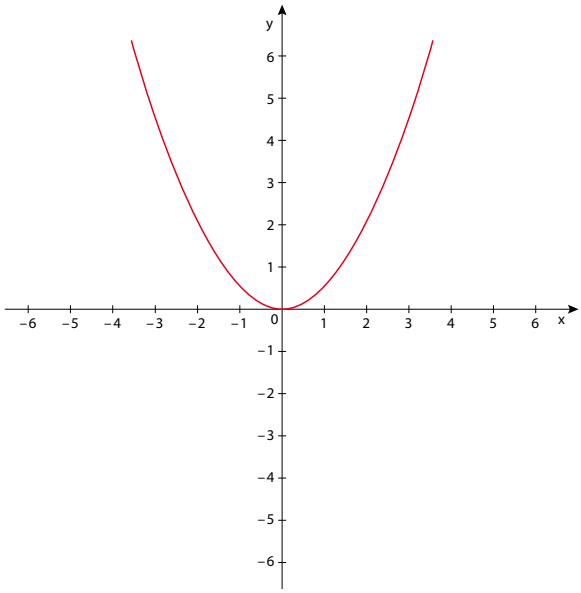


© Walmir Monteiro/SambaPhoto. Reprodução autorizada por João Candido Portinari

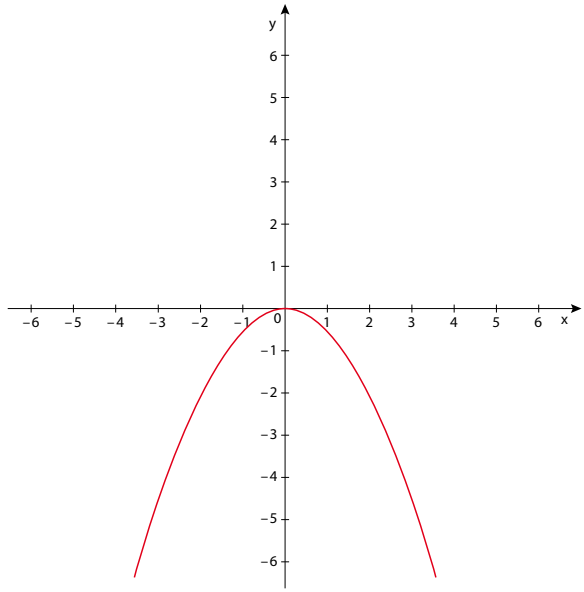
A trajetória de um corpo lançado para o alto e submetido à força da gravidade também descreve uma curva desse tipo.

A parábola pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo.

Ilustrações: © Sidnei Moura



Concavidade voltada para cima.



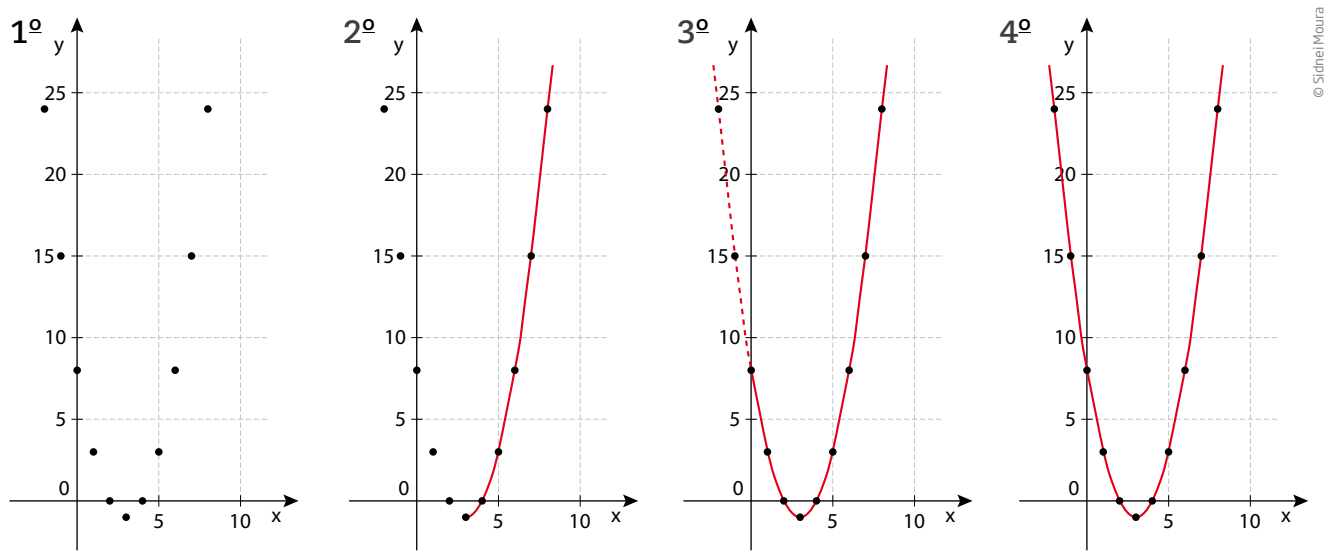
Concavidade voltada para baixo.

Para esboçar o gráfico de uma função quadrática, é possível construir uma tabela e atribuir certo número de valores para a variável **x**. Por exemplo, seja a função $y = x^2 - 6x + 8$.

Atribuem-se a **x** valores numéricos que determinem pares ordenados e possam ser representados como pontos do plano cartesiano.

x	$x^2 - 6x + 8$	Par ordenado	
0	8	(0, 8)	← intersecção com o eixo das ordenadas
1	3	(1, 3)	
2	0	(2, 0)	← intersecção com o eixo das abscissas
3	−1	(3, −1)	
4	0	(4, 0)	← intersecção com o eixo das abscissas
5	3	(5, 3)	
6	8	(6, 8)	
7	15	(7, 15)	
8	24	(8, 24)	

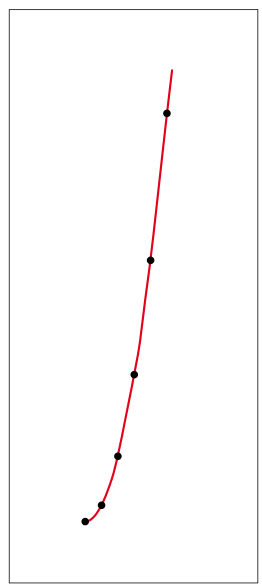
Unindo os pontos, tem-se um esboço da parábola.



© Sidnei Moura

Dicas importantes:

• para ter uma visão da parábola e assim poder analisar o comportamento do gráfico da função quadrática, é conveniente escolher bem os valores para **x**. Veja no exemplo ao lado (que mostra apenas um "pedaço" da parábola) que, ao aumentar o valor de **x**, também aumenta o valor de **y**, e que não é possível saber características importantes do gráfico – por exemplo, em que pontos ele intercepta os eixos das abscissas (do **x**) e das ordenadas (do **y**);



© Sidnei Moura

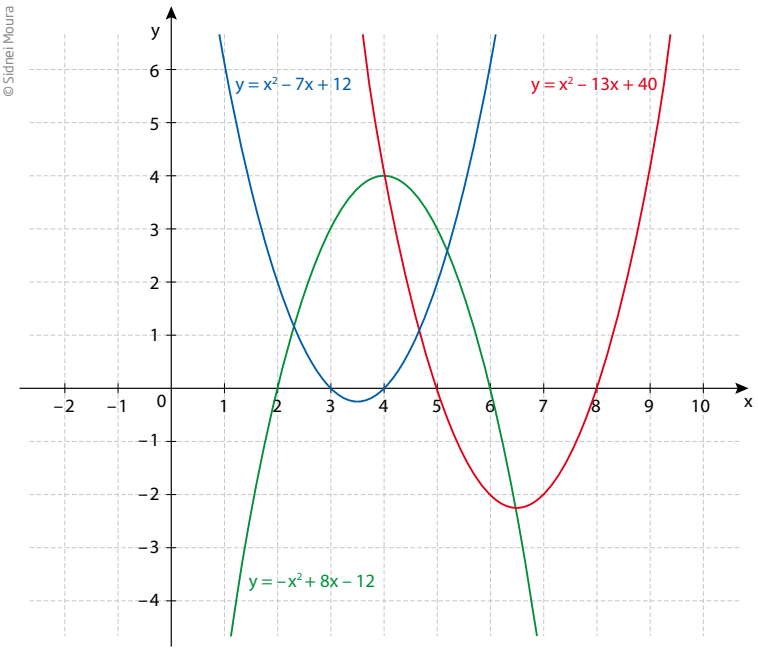
"Pedaço" de parábola.

• para ter condições de analisar o comportamento do gráfico, é conveniente localizar alguns pontos notáveis, como as **intersecções com os eixos** e o **vértice** da parábola;

• os pares ordenados do tipo (0, y) são pontos do eixo das ordenadas; os do tipo (x, 0) são pontos do eixo das abscissas;

• se um ponto do tipo (x, 0) satisfaz $y = ax^2 + bx + c$, então a abscissa **x** é uma raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Observe o esboço do gráfico de algumas funções quadráticas:

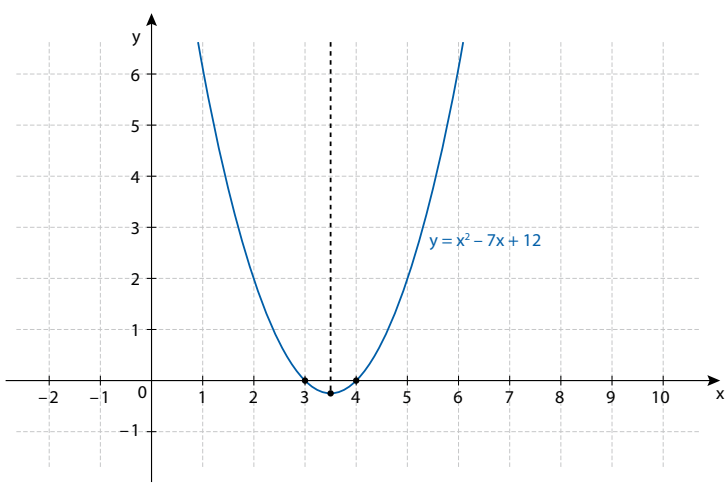


© Sidnei Moura

Considere algumas informações importantes desses gráficos:

- a parábola é simétrica;
- o eixo de simetria da parábola estudada aqui é uma reta vertical que passa pelo vértice da parábola;
- o vértice da parábola é um ponto que a separa em duas partes: uma sempre crescente, outra sempre decrescente;
- a parábola sempre intersecta o eixo das ordenadas (eixo **y**) em um só ponto, determinado pelo par ordenado (0, y);
- a parábola pode intersectar o eixo das abscissas (eixo **x**) em dois pontos, um ponto ou não intersectar esse eixo, dependendo da existência e do número de raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Veja o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 7x + 12$ (ao lado). Em razão da escolha dos valores para **x** (eixo das abscissas), não se pode ver em que ponto a parábola intercepta o eixo das ordenadas (eixo **y**), mas, sabendo que se trata de um ponto do tipo (0, y), basta substituir x = 0 na expressão e encontrar o **y** correspondente.

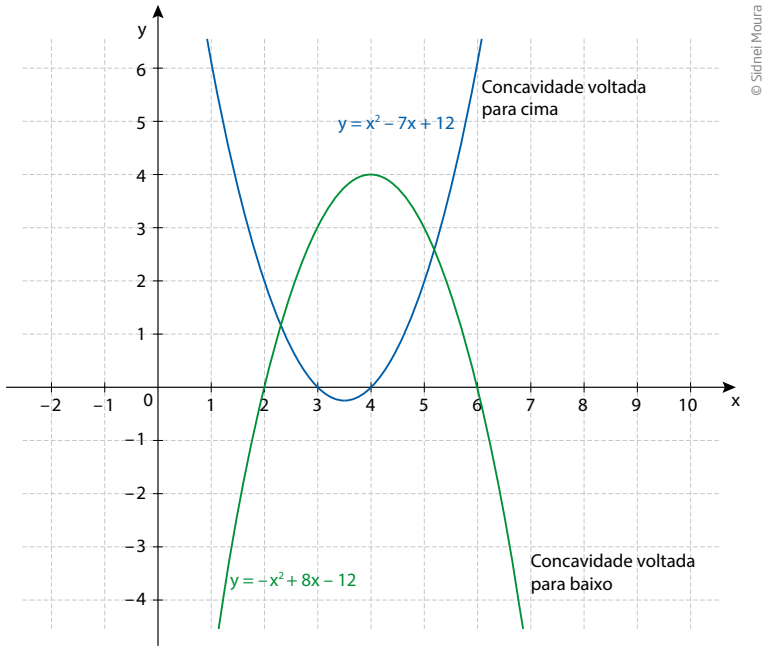


© Sidnei Moura

Se $x = 0$, então $y = 0^2 - 7 \cdot 0 + 12 = 0 - 0 + 12 = 12$.

A intersecção do gráfico com o eixo **y** é o ponto (0, 12), que está fora do alcance da visão nesse esboço.

Outra característica do gráfico da função quadrática é a posição da concavidade da parábola, que pode estar voltada para cima ou para baixo:



O que determina se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo é o coeficiente da variável elevada ao quadrado ser positivo ou negativo.

A parábola nos eixos coordenados

Eixo das ordenadas

Qualquer ponto do eixo das ordenadas tem coordenadas (0, y), isto é, tem abscissa nula (x = 0). Assim, para encontrar o ponto do gráfico da função que intersecta o eixo das ordenadas, basta calcular o valor numérico de:

$y = ax^2 + bx + c$, para $x = 0$:

$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$y = 0 + 0 + c \Rightarrow y = c$

Portanto, a parábola sempre intersecta o eixo **y** no ponto (0, c).

Eixo das abscissas

Qualquer ponto do eixo das abscissas tem coordenadas (x, 0), ou seja, a ordenada é nula (y = 0). Assim, as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são as abscissas dos pontos onde o gráfico "corta" o eixo **x**.

Para entender melhor, é importante revisar a fórmula de Bhaskara.

Dada uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então as raízes são dadas pela fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

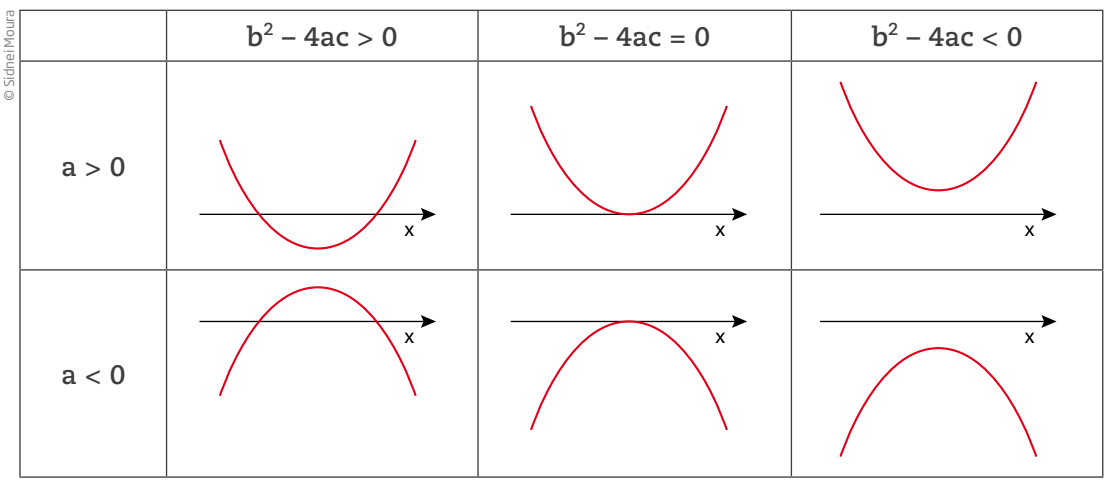
- Se a equação tiver duas raízes reais distintas ($b^2 - 4ac > 0$), então a parábola intersecta o eixo **x** em dois pontos.

- Se a equação tiver duas raízes reais e iguais ($b^2 - 4ac = 0$), então a parábola tangencia o eixo **x**.

- Se a equação não tiver raízes reais ($b^2 - 4ac < 0$), então o gráfico não intersecta o eixo **x**.

Resumindo:

© Sidnei Moura



Vértice

Não é difícil determinar as coordenadas do vértice da parábola:

- para determinar a abscissa do vértice, basta calcular a média aritmética das raízes da equação de 2º grau;

- sabendo o valor da abscissa, basta substituir na expressão da função e calcular a ordenada.

Veja um exemplo:

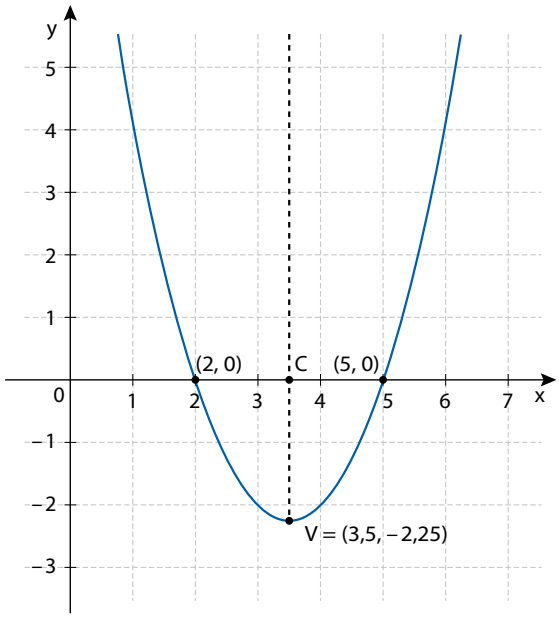
Seja a função $y = x^2 - 7x + 10$; se $y = 0$, então os valores de **x** que satisfazem a equação $x^2 - 7x + 10 = 0$ (as raízes da equação) fornecem as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas.

Usando a fórmula de Bhaskara, encontram-se os valores x' = 2 e x'' = 5. A média aritmética de 2 e 5 é $x_v = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$; essa é a abscissa do vértice.

Calculando o valor numérico de **y** para $x = \frac{7}{2}$, obtém-se $y_v = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \left(\frac{7}{2}\right) + 10$.

$$y_v = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 10 = \frac{49 - 98 + 40}{4} = -\frac{9}{4}$$

Assim, o vértice dessa função quadrática é dado pelo par ordenado $V\left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ ou V (3,5, –2,25).



© Sidnei Moura

Além disso, para facilitar o cálculo das coordenadas do vértice, basta lembrar o padrão geral da função quadrática ($y = ax^2 + bx + c$) e, consequentemente, seus coeficientes. Assim, pode-se calcular diretamente essas coordenadas da seguinte forma:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

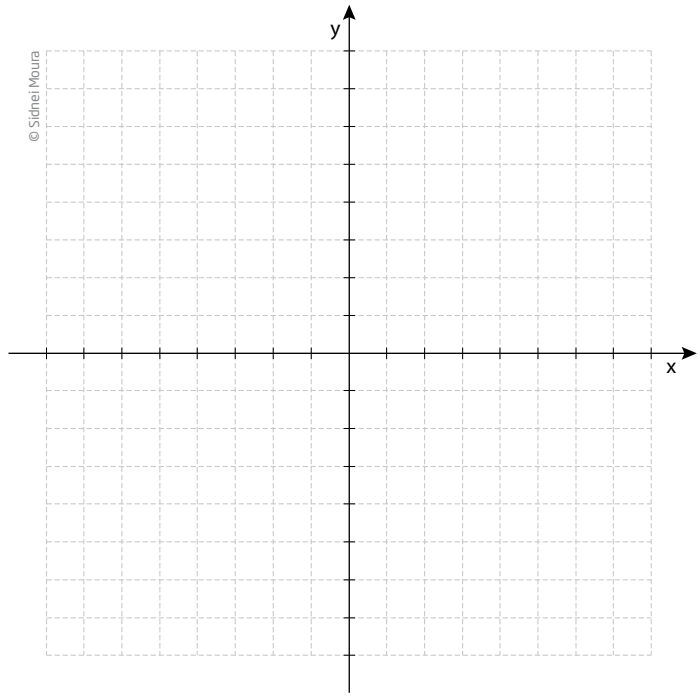
Para obter um gráfico mais definido, com mais pontos, pode-se construir uma tabela de valores de **x** próximos da abscissa do vértice. Observe a seguir.

x	$y = x^2 - 7x + 10$
0	10
1	4
2	0
3	–2
3,5	–2,25
4	–2
5	0
6	4
7	10

Com o desenvolvimento da tecnologia, porém, criaram-se muitos programas para a construção de gráficos, como as planilhas e outros programas mais específicos.

ATIVIDADE 1 Gráfico da função quadrática

1 Construa tabelas fazendo o **x** variar de –3 a 3 e esboce os gráficos das seguintes funções quadráticas, no plano cartesiano, usando cores diferentes para cada um deles.



a) $y = x^2$

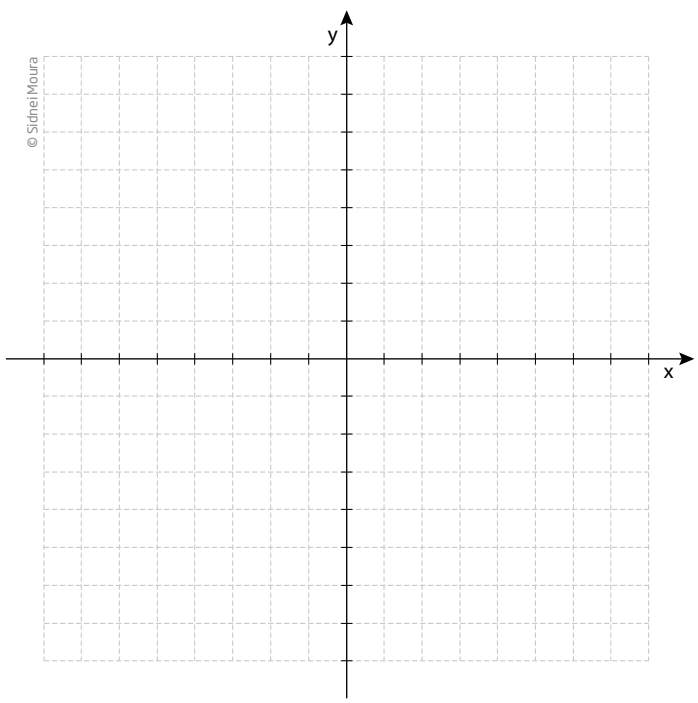
b) $y = 2x^2$

c) $y = \frac{1}{2}x^2$

d) $y = -x^2$

O que você observou?

2 Dada a função $y = x^2 - 5x + 6$, construa uma tabela atribuindo valores inteiros entre – 2 e 5 para a variável **x**. A seguir, esboce seu gráfico.



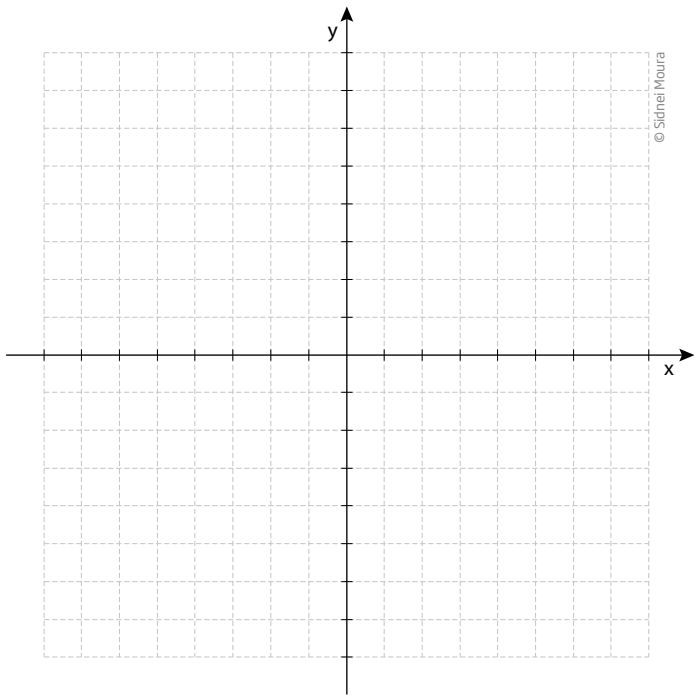
3 Esboce, no plano cartesiano, os gráficos das seguintes funções:

a) $y = x^2 - 4x + 4$

b) $y = x^2 + 4x + 4$

c) $y = x^2 + x + 1$

d) $y = x^2 + x$



4 Dê as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico das funções a seguir com os eixos das abscissas e das ordenadas.

a) $y = 2x^2 - 10x + 12$

b) $y = x^2 - 6x + 9$

c) $y = x^2 + 2x$

d) $y = 2x^2 - 6$

5 Observe que uma função do tipo $y = ax^2 + bx$ sempre passa pela origem (0, 0). Explique por quê.

6 Explique qual é a característica do gráfico das funções do tipo $y = ax^2 + c$.

7 Quais são as características principais do gráfico das funções do tipo $y = ax^2$?

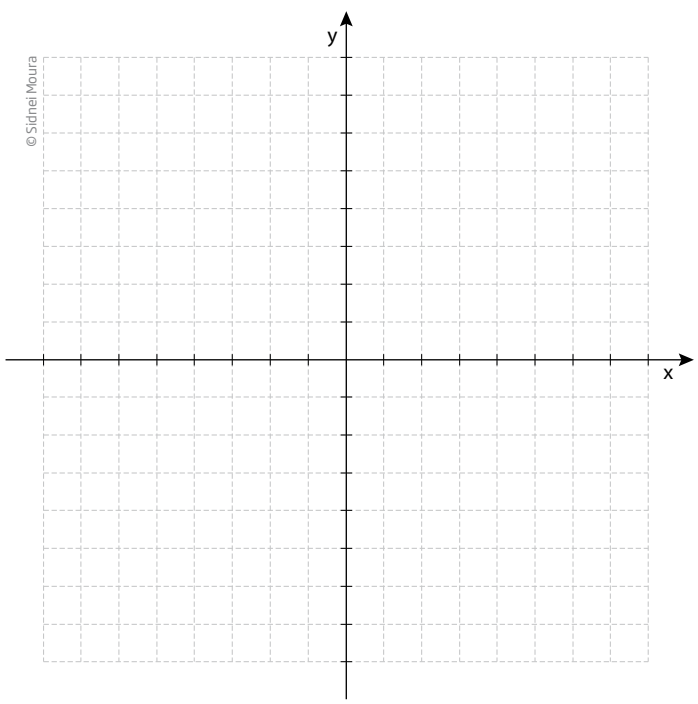
8 Represente no plano cartesiano as funções:

a) $y = x^2$

b) $y = 2x^2$

c) $y = 3x^2$

d) $y = \frac{x^2}{2}$



© Sidnei Moura

Descreva o que você observou.

9 Represente no plano cartesiano as funções:

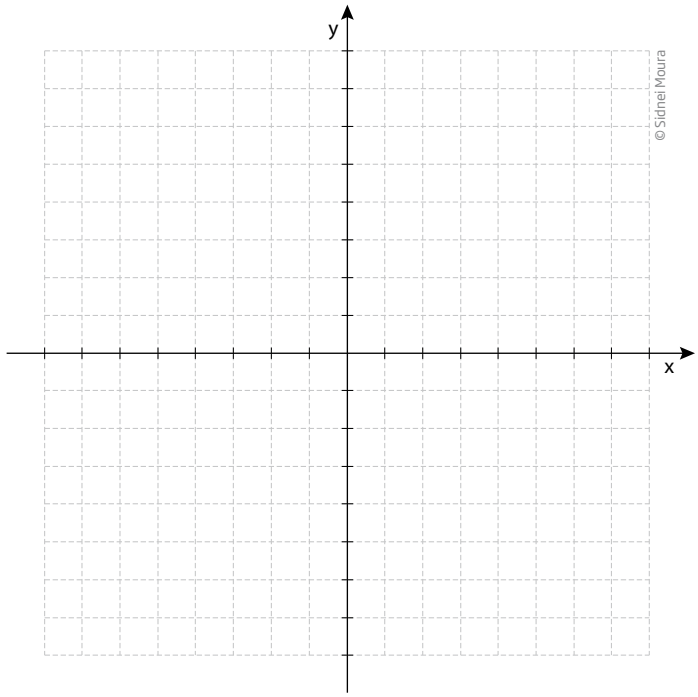
a) $y = x^2 - 2$

b) $y = x^2 - 1$

c) $y = x^2$

d) $y = x^2 + 1$

e) $y = x^2 + 2$



Descreva o que você observou.

DESAFIO

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando **x** o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro e **V** o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona **V** e **x** é

a) $V = 10.000 + 50x - x^2$

b) $V = 10.000 + 50x + x^2$

c) $V = 15.000 - 50x - x^2$

d) $V = 15.000 + 50x - x^2$

e) $V = 15.000 - 50x + x^2$

Enem 2009. Prova azul. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2009/dia2_caderno7.pdf>. Acesso em: 5 set. 2014.

PENSE SOBRE...

O conceito de função quadrática, também chamada de função de 2º grau, começou a ser aplicado no Brasil por intermédio da Academia Real Militar, no início do século XIX. Ele foi usado para estudar a trajetória dos projéteis de canhões que serviam para proteger o país de invasões estrangeiras. A partir de então, esses estudos evoluíram.

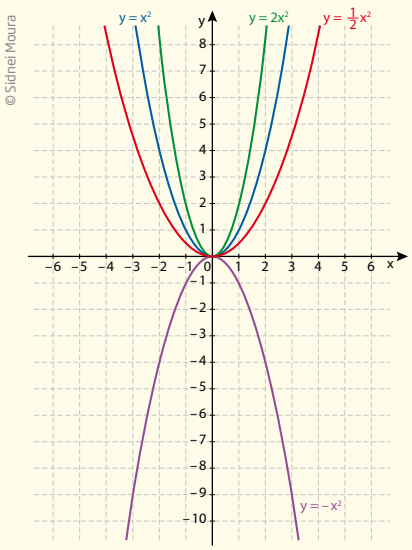
A Física é uma das ciências em que se aplica muito esse conceito. Pode-se observar que as trajetórias de montanhas-russas nos grandes parques de diversão têm a forma de parábolas, forma que também está presente na trajetória de lançamento de foguetes realizado pelas agências espaciais internacionais.

Além desses exemplos, você consegue se lembrar de alguma outra aplicação das funções quadráticas?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Gráfico da função quadrática

1



© Sidnei Moura

a)

x	y
– 3	9
– 2	4
– 1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

b)

x	y
– 3	18
– 2	8
– 1	2
0	0
1	2
2	8
3	18

c)

x	y
– 3	4,5
– 2	2
– 1	0,5
0	0
1	0,5
2	2
3	4,5

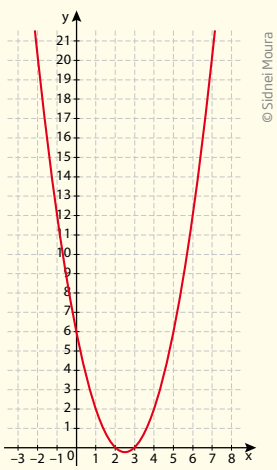
d)

x	y
– 3	– 9
– 2	– 4
– 1	– 1
0	0
1	– 1
2	– 4
3	– 9

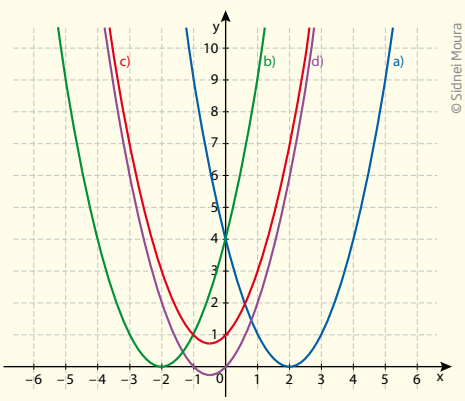
Observa-se que: se a > 0, a concavidade é voltada para cima; se a < 0, ela é voltada para baixo; aumentando o valor de **a**, a parábola fica mais "apertada"; diminuindo o valor de **a**, fica mais "alargada".

2

x	y
–2	20
–1	12
0	6
1	2
2	0
3	0
4	2
5	6


© Sidnei Moura

3



© Sidnei Moura

4 Para verificar quais são os pontos em que o gráfico passa pelo eixo **x**, é necessário tomar y = 0. Do mesmo modo, para saber qual o ponto em que o gráfico passa pelo eixo **y**, é preciso tomar x = 0. Assim, os pontos são:

a) (2, 0), (3, 0) e (0, 12).

b) (3, 0) e (0, 9).

c) (0, 0) e (–2, 0).

d) (0, –6), $(\sqrt{3}, 0)$ e $(-\sqrt{3}, 0)$.

5 Como o termo independente é 0 (zero) e ele determina o ponto no qual a parábola corta o eixo **y**, então ela sempre passará por esse ponto. Mas, nesse ponto, o **x** também vale 0, portanto a parábola corta os dois eixos ao mesmo tempo, o que garante que uma das raízes da equação seja 0.

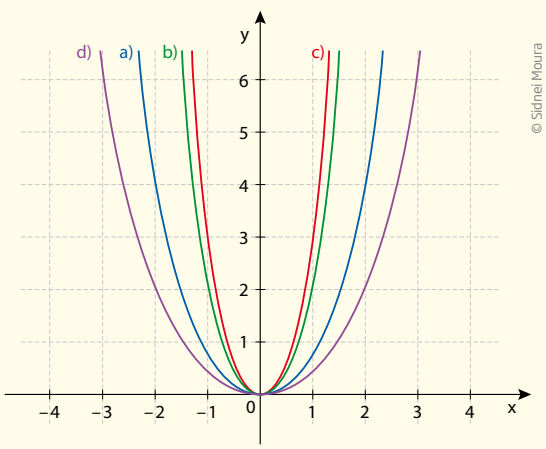
6 Ao resolver a equação $ax^2 + c = 0$, encontram-se os seguintes valores para **x**:

$$x' = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ e } x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Portanto, as raízes da equação são simétricas.

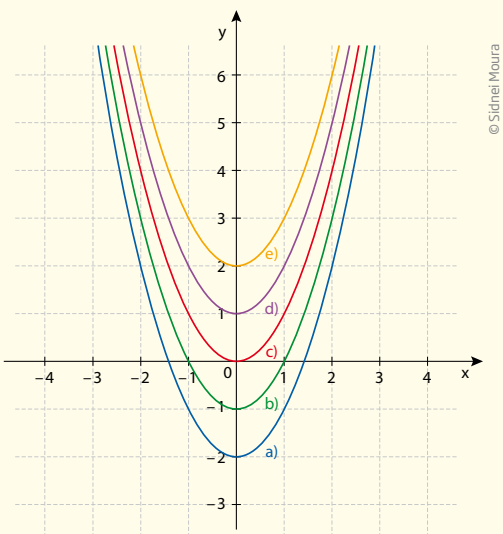
7 As principais características do gráfico desse tipo de função são: ser simétrico em relação ao eixo das ordenadas e ter como vértice da parábola (0, 0). Os gráficos do exercício 8 representam bem essas afirmações.

8



Observa-se que todos eles passam pela origem e que, quanto maior o valor de **a**, mais "fechada" é a concavidade da parábola.

9



Observa-se que, como o coeficiente **a** é sempre o mesmo, a abertura da parábola se mantém a mesma e que a variação de valores do coeficiente **c** faz a parábola se deslocar para cima ou para baixo em relação ao eixo **y**. Além disso, nesse tipo de parábola, o coeficiente **c** coincide com o vértice da parábola e o eixo **y** é o eixo de simetria do gráfico.

HORA DA CHECAGEM

Desafio

Alternativa correta: **d**.

Preço do litro 1,50 – 0,01x, pois, se x = 1, o preço do litro será R$ 1,49; se x = 2, o preço do litro será R$ 1,48 e assim por diante.

Como a cada desconto de 1 centavo as vendas aumentam em 100 L, a quantidade de litros vendida por dia pode ser expressa por 10.000 + 100x.

Assim, o valor arrecadado pelo posto por dia será dado pelo preço do litro multiplicado pela quantidade de litros vendida:

$V = (1{,}50 - 0{,}01x) \cdot (10.000 + 100x)$

$V = 15.000 + 150x - 100x - x^2$

$V = 15.000 + 50x - x^2$

Registro de dúvidas e comentários

MATRIZES

TEMAS

1. Noção de matrizes
2. Operações com matrizes

Introdução

Há diversas situações do dia a dia, principalmente em atividades profissionais, nas quais é preciso organizar dados por meio de tabelas ou quadros. As tabelas você já deve conhecer bem, pois apareceram desde quando estudou as tabuadas. Além disso, elas estão presentes diariamente em jornais e em vários outros lugares, como postos de pagamento de pedágio nas estradas.

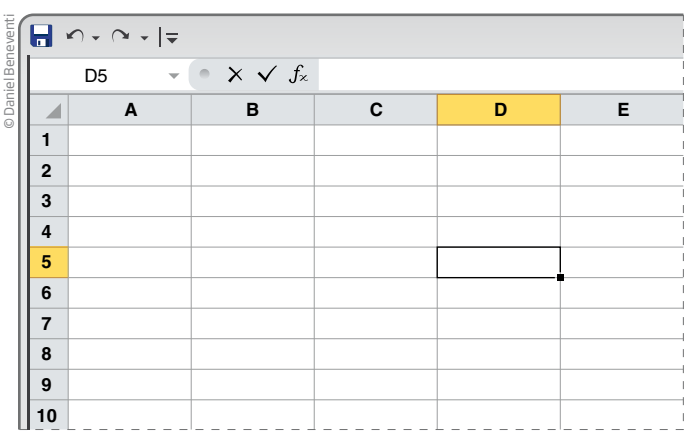


© Daniel Beneventi

A organização de dados em tabelas numéricas interessou aos matemáticos, que desenvolveram teorias para resolver problemas que envolvem muitas variáveis. Isso ocorre hoje em dia, por exemplo, nas empresas, que têm de controlar todos os itens que compõem o custo de determinada mercadoria, ou a folha de pagamento, que tem centenas de trabalhadores, entre outros.

Contadores, economistas, engenheiros e muitos outros profissionais utilizam planilhas eletrônicas de computadores, conhecidas como planilhas de cálculo, organizadas em linhas e colunas.

Nesta Unidade, você vai estudar a Matemática que está presente em tabelas e planilhas de cálculos formadas por números, chamadas matrizes.



© Daniel Beneventi

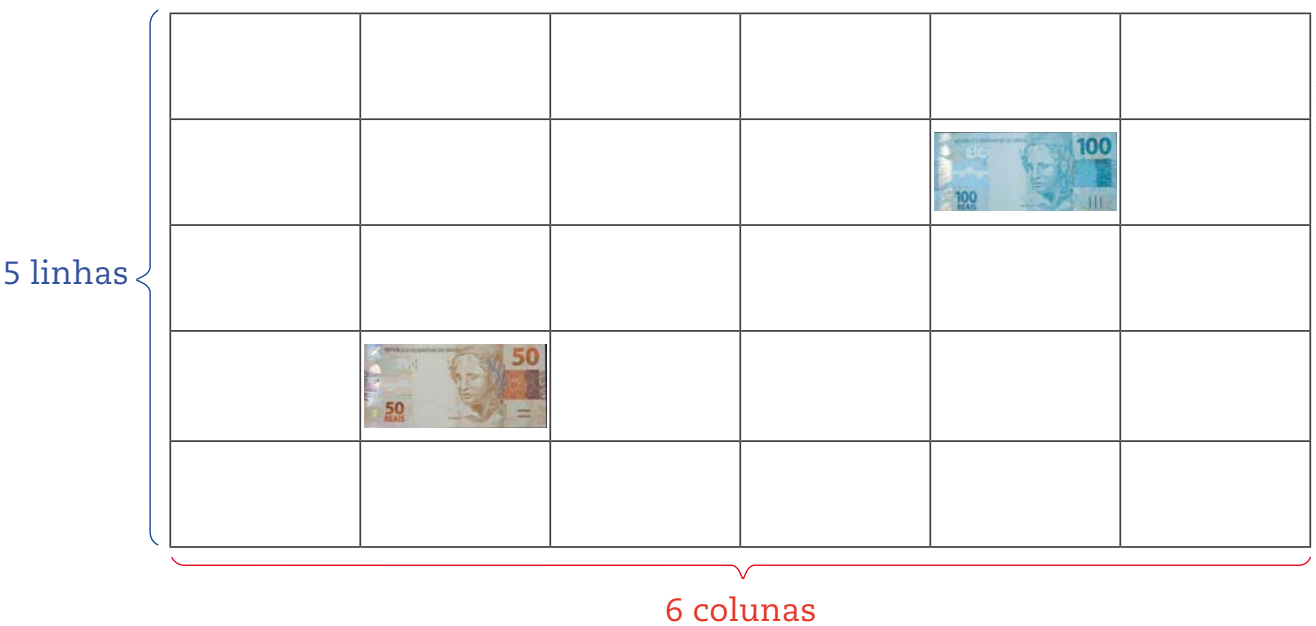
Neste tema, você iniciará o estudo de matrizes, relacionando-as com várias tabelas numéricas.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Provavelmente você já viu algumas tabelas numéricas e sabe como interpretá-las e utilizá-las em situações do cotidiano. Pense em uma dessas tabelas. O que os números presentes nela queriam dizer?

Introdução às matrizes

Para compreender melhor a teoria matemática apresentada nesta Unidade, considere um gaveteiro com várias camadas organizadas em colunas:



Observe que esse gaveteiro tem 5 camadas horizontais, as linhas, e 6 camadas verticais, as colunas. Diz-se que é um quadro do tipo 5 × 6 (lê-se: “5 por 6”).

Na gaveta da 2ª linha de cima para baixo, que está na 5ª coluna da esquerda para a direita, há uma nota de R$ 100,00. Observe a estrutura desse gaveteiro para indicar o “endereço” da gaveta que contém a cédula de R$ 50,00.

Com base na descrição do endereço da cédula de R$ 100,00, pode-se dizer que a nota de R$ 50,00 está na 4ª linha de cima para baixo, e na 2ª coluna da esquerda para a direita.

Os matemáticos simplificaram a descrição de endereços como a desse gaveteiro criando um código que se baseia em duas informações: a linha e a coluna.

Para indicar a localização de uma gaveta, usa-se uma letra seguida de dois números, correspondentes à linha e à coluna:

- a nota de R$ 100,00 está no cruzamento da 2ª linha com a 5ª coluna; seu endereço pode ser representado pelo código a_{25};
- a nota de R$ 50,00 está na 4ª linha com a 2ª coluna; seu endereço pode ser representado pelo código a_{42}.

Observe que se estabeleceu uma ordem: o primeiro número do código (subscrito ao lado da letra minúscula) indica a linha, e o segundo número, a coluna.

Ao quadro retangular formado por linhas e colunas, como o gaveteiro do exemplo, os matemáticos chamaram **matriz**.

O conceito matemático de matriz é importante por suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, sobretudo como ferramenta para resolver problemas que recaem em um sistema de **equações lineares**, muito utilizadas em problemas na área de Engenharia ou de Economia.

A matriz a seguir tem 2 linhas e 3 colunas; diz-se que é uma matriz 2 × 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 2$	$a_{12} = 0$	$a_{13} = -1$
$a_{21} = 7$	$a_{22} = 12$	$a_{23} = 5$

Confira que são os índices (os “numerozinhos” subscritos ao lado da letra) que indicam a posição (o endereço) de cada casa com seu respectivo valor numérico; por exemplo: $a_{23} = 5$ indica que o número que está na 2ª linha com a 3ª coluna é igual a 5.

Observe ainda que os elementos da matriz A (apresentada acima) são números inteiros, mas, dependendo da situação ou do uso, uma matriz também pode ser formada por números reais, como no exemplo da matriz B a seguir:

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \sqrt{2} & 3{,}14 \end{bmatrix}$$

$b_{11} = 100$	$b_{12} = 1$	$b_{13} = -1$
$b_{21} = \frac{1}{3}$	$b_{22} = \sqrt{2}$	$b_{23} = 3{,}14$

Uma matriz **A** pode ser entendida como um conjunto m × n de números reais, dispostos em **m** linhas e **n** colunas que formam o quadro a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mas não se assuste com essa quantidade de índices, linhas e colunas, pois, informalmente, pode-se dizer que "uma matriz é um quadro retangular, recheado de números ou expressões matemáticas".

ATIVIDADE 1 Leitura de matrizes

1 Na matriz A, indique os valores numéricos dos elementos:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 \\ 11 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

a) $a_{13} =$ _____

b) $a_{21} =$ _____

c) $a_{11} =$ _____

d) $a_{22} =$ _____

2 Determine os valores dos elementos da matriz B e escreva-a de modo simplificado:

$$B = \begin{bmatrix} 3^2 - 2^3 & 2 \cdot \sqrt{49} \\ \dfrac{\sqrt{36}}{3} & 2^3 - 2 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

a) $a_{11} =$ _____

b) $a_{12} =$ _____

c) a_{21} = _____

d) a_{22} = _____

PENSE SOBRE...

Você já viu ou explorou uma planilha de cálculo, dessas usadas para organizar as contas de uma empresa?

Algumas dessas planilhas têm quadros que apresentam centenas de colunas e linhas.

Imagine, por exemplo, uma matriz com 15 informações de cada um dos seus 120 funcionários. Essa matriz teria, no mínimo, 1.800 casas, também chamadas células ou celas.

Para trabalhar com essa quantidade de dados, os profissionais levariam muitas horas, talvez dias, dependendo da complexidade das informações, no caso de serem necessários cálculos de cada célula. Com a programação de computadores, hoje esses cálculos podem ser feitos em segundos.

A matemática das matrizes

Tal como se faz com números, é possível somar, subtrair e multiplicar matrizes, mas não é possível compará-las, como acontece com os números, ou seja, não é possível dizer que uma matriz é maior ou menor que outra, mas é possível dizer se duas matrizes são iguais.

Igualdade de matrizes

Para que duas matrizes sejam iguais, elas devem ter o mesmo número de linhas e de colunas e seus elementos de mesmo endereço também devem ser iguais.

Considere duas matrizes, A e B:

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & -7 & y \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & w \\ 1 & z & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Se as matrizes A e B são iguais, os elementos que estão nas mesmas posições também são iguais:

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = \sqrt{5} \qquad z = -7 \qquad w = 3$$

ATIVIDADE 2 Exercitando a leitura de matrizes

Determinada indústria tem quatro fábricas: F_1, F_2, F_3 e F_4. Em cada uma dessas fábricas são produzidos três produtos: P_1, P_2 e P_3.

A produção semanal dessa indústria pode ser representada por uma matriz B (do tipo 3 × 4), composta por números que indicam a quantidade de unidades de cada produto produzido em cada fábrica:

$$B = \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 56 & 36 & 38 & 10 \\ 34 & 45 & 42 & 8 \\ 28 & 27 & 21 & 38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \\ \leftarrow P_3 \end{matrix}$$

Pela disposição dos números na matriz, pode-se dizer quantos produtos do tipo P_2 são fabricados na fábrica F_3.

$$B = \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 56 & 36 & 38 & 10 \\ 34 & 45 & 42 & 8 \\ 28 & 27 & 21 & 38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \\ \leftarrow P_3 \end{matrix}$$

1 Responda se as afirmações são verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) ☐ Na fábrica F_2 são fabricados 36 produtos do tipo P_1.

b) ☐ Na fábrica F_4 são fabricados 10 produtos do tipo P_2.

c) ☐ Na fábrica F_3 são fabricados 38 produtos do tipo P_3.

d) ☐ Na fábrica F_1 são fabricados 34 produtos do tipo P_2.

e) ☐ Na fábrica F_2 são fabricados 27 produtos do tipo P_3.

f) ☐ Na fábrica F_3 são fabricados 45 produtos do tipo P_2.

2 Analise as seguintes afirmações:

I. O número de unidades do produto P_2 que as fábricas F_1 e F_4 produzem, juntas, é igual à quantidade produzida desses produtos pela fábrica F_3, sozinha.

II. Entre todas as fábricas, a que mais fabrica o produto P_3 é a fábrica F_1.

III. Na fábrica F_3, a quantidade de produtos P_2 produzida é o dobro do que é fabricado do produto P_3.

Assinale a alternativa que contém a análise CORRETA:

a) Apenas a afirmação III é verdadeira.

b) Todas as afirmações são verdadeiras.

c) Todas as afirmações são falsas.

d) Apenas a afirmação II é falsa.

DESAFIO

O *Aedes aegypti* é vetor transmissor da dengue. Uma pesquisa feita em São Luís – MA, de 2000 a 2002, mapeou os tipos de reservatórios onde esse mosquito era encontrado. A tabela abaixo mostra parte dos dados coletados nessa pesquisa.

Tipos de reservatórios	População de *A. aegypti*		
	2000	2001	2002
Pneu	895	1.658	974
Tambor/tanque/depósito de barro	6.855	46.444	32.787
Vaso de planta	456	3.191	1.399
Material de construção/peça de carro	271	436	276
Garrafa/lata/plástico	675	2.100	1.059
Poço/cisterna	44	428	275
Caixa-d'água	248	1.689	1.014
Recipiente natural, armadilha, piscina e outros	615	2.658	1.178
Total	10.059	58.604	38.962

Caderno de Saúde Pública, Rio de Janeiro, v. 20, n. 5, out. 2004. (Com adaptações.)

Se mantido o percentual de redução da população total de *A. aegypti* observada de 2001 para 2002, teria sido encontrado, em 2003, um número total de mosquitos

a) menor que 5.000.

b) maior que 5.000 e menor que 10.000.

c) maior que 10.000 e menor que 15.000.

d) maior que 15.000 e menor que 20.000.

e) maior que 20.000.

Enem 2007. Prova amarela. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2007/2007_amarela.pdf>. Acesso em: 26 set. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Leitura de matrizes

1 Esse é um exercício para identificar os elementos de uma matriz. Cada termo está no cruzamento de uma linha (indicada pelo primeiro número do endereço) com uma coluna (indicada pelo segundo número do endereço).

a) $a_{13} = 0$

b) $a_{21} = 11$

c) $a_{11} = -5$

d) $a_{22} = -3$

2 Para resolver esse exercício, basta calcular os valores numéricos de cada elemento, respeitando a ordem das operações: primeiro, potências e raízes; depois, multiplicações e divisões, na ordem em que aparecerem; e por fim adições e subtrações.

a) $a_{11} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$

b) $a_{12} = 2 \cdot \sqrt{49} = 2 \cdot 7 = 14$

c) $a_{21} = \frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{6}{3} = 2$

d) $a_{22} = 2^3 - 2 \cdot 5 = 8 - 10 = -2$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Atividade 2 - Exercitando a leitura de matrizes

1

a) V

b) F Pois, na fábrica F_4, são fabricados 8 produtos do tipo P_2.

c) F Pois, na fábrica F_3, são fabricados 21 produtos do tipo P_3.

d) V

e) V

f) F Pois, na fábrica F_3, são fabricados 42 produtos do tipo P_2.

2 Alternativa correta: **d**. As afirmações I e III são verdadeiras e a afirmação II é falsa porque, entre todas as fábricas, a que mais fabrica o produto P_3 é a fábrica F_4.

Desafio

Alternativa correta: **e**. Se for mantido o percentual de redução da população de *Aedes aegypti* entre 2001 e 2002, então seja **x** o número de mosquitos de 2003. Logo:

$$\frac{38.962}{58.604} = \frac{x}{38.962} \Rightarrow x = \frac{38.962^2}{58.604} \cong 25.903 > 20.000$$

Registro de dúvidas e comentários

Uma vez que já sabe o que é uma matriz, neste tema você aprenderá a fazer operações explorando algumas situações práticas.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você sabe dizer qual é a posição do seu time de futebol em determinado campeonato? Quantos pontos ele tem? Quantos gols marcou? Quantos gols sofreu?

É provável que, para verificar todos esses dados, seja necessário recorrer à tabela do campeonato. Você já notou que ela é uma tabela numérica e que, a cada rodada, seus valores mudam, de acordo com o desempenho de seu time e o dos outros também?

Cálculos com matrizes

Em tabelas de campeonato de futebol, para registrar as rodadas, são feitas várias operações, como somar ou subtrair os gols feitos e sofridos, além de multiplicar e somar os pontos, de acordo com vitória, empate ou derrota.

Além disso, há diversas outras situações práticas cujas atividades podem ser realizadas com o auxílio das matrizes: as atividades financeiras de um banco, por exemplo, ou o fluxo de caixa de um supermercado.

Agora que você percebeu a importância do cálculo com matrizes, verá como isto é feito!

Adição e subtração de matrizes

Para melhor compreender como somar e subtrair matrizes, analise a situação de uma oficina de veículos.

Essa oficina trabalha com automóveis e caminhões, e realiza serviços de funilaria, pintura e mecânica. O quadro a seguir indica quantos veículos de cada tipo estão em cada seção da oficina:

	Pintura	Funilaria	Mecânica
Automóveis	3	2	5
Caminhões	2	3	6



© Dmitry Kalinovsky/123RF

Se o gerente da oficina usar sempre a mesma disposição de quadro, não há a necessidade de escrever "automóveis", "caminhões", "pintura", "funilaria" e "mecânica"; basta dispor os números de veículos de cada seção em uma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Suponha que a oficina desse exemplo tenha duas lojas: a *sede*, que fica em Avaré, e a *filial*, que fica em Bertioga.

A matriz A fornece o número de veículos que estão em Avaré, e a matriz B, o número de veículos que estão em Bertioga:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

VOCÊ SABIA?

Ao pesquisar a palavra **matriz** em um dicionário, você encontrará mais de 30 significados diferentes para ela.

Matriz como molde, utilizada em tipografias; matriz significando a sede de uma empresa ou de uma igreja; matriz como conceito matemático são alguns deles.

Em dicionários de Matemática, são definidos mais de 20 tipos de matrizes.

Para saber quantos veículos de cada tipo estão nas seções das duas oficinas, o gerente usa um programa de computador que soma as duas matrizes por meio de uma regra bem simples: a matriz C é o resultado da soma das matrizes A e B.

Os elementos da matriz C indicam a quantidade de automóveis ou de caminhões que estão nas seções de funilaria, pintura e mecânica das duas oficinas somadas.

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3+5 & 2+2 & 5+0 \\ 2+2 & 3+1 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & 4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & 8 \end{bmatrix}$$

Pela análise da matriz soma, pode-se saber que há 4 automóveis nas seções de funilaria e 8 caminhões nas seções de mecânica das duas oficinas.

Observe que a adição de matrizes foi possível porque as duas matrizes eram do mesmo tipo, ou seja, tinham o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

IMPORTANTE!

O número de linhas e colunas de uma matriz determina sua ordem. Matriz de mesma ordem (m × m) possui o mesmo número de linha e de coluna. Assim, só se somam ou subtraem duas ou mais matrizes quando essas forem de mesma ordem, ou seja, mesmo número de linhas e de colunas.

ATIVIDADE 1 Somando e subtraindo matrizes

1 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, e a matriz $C = A + B$, responda V (verdadeiro) ou F (falso) para as afirmações:

a) ☐ Todos os elementos da matriz C são positivos.

b) ☐ $a_{32} + b_{32} = 0$

c) ☐ $a_{22} + b_{22} > 0$

d) ☐ $a_{31} + b_{31} = 0$

e) ☐ $a_{21} + b_{21} < 0$

2 Considere as matrizes A, B, C, D, E, F e G:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}$$

DICA!

Considere que o dobro da matriz A equivale à soma de duas matrizes iguais, ou seja, que 2A = A + A, e que 3A = A + A + A, e assim por diante.

Calcule e atribua V (verdadeiro) ou F (falso):

a) ☐ 2A + C = F

b) ☐ A + B = E

c) ☐ D − A = A

d) ☐ 2A = D

e) ☐ 2C + A = B

f) ☐ 2A + F = G

3 É possível somar a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ com a matriz $N = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$? Explique.

Voltando às matrizes

Em linguagem matemática, diz-se que a soma de duas matrizes A e B do tipo m × n é uma matriz C do mesmo tipo, tal que cada elemento de C é dado por:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Se **i** e **j** são as coordenadas de localização do elemento na linha e na coluna, respectivamente, ou seja, o elemento que está na primeira linha (i = 1) e na terceira coluna (j = 3) de uma matriz é o elemento $a_{ij} = a_{13}$.

No caso particular de duas matrizes A e B (ambas 2 × 3), a matriz C resultante da **soma** é:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Veja um exemplo numérico:

$$\text{Sejam } A = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -5 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -5 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + (-7) & 12 + 1 & -5 + 3 \\ -3 + 4 & 0 + 9 & 2 + (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 & -2 \\ 1 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

A **subtração** de matrizes é feita do mesmo modo.

Sejam as matrizes A e B; então a matriz diferença D = A – B é uma matriz m × n, tal que cada elemento de D é dado por: $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Veja os exemplos com os valores numéricos de cada célula da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- A matriz **soma**:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3 + 5 & 0 + 2 & 5 + 0 \\ 2 + 2 & 3 + 1 & 6 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- A matriz **diferença**:

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 3 - 5 & 0 - 2 & 5 - 0 \\ 2 - 2 & 3 - 1 & 6 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Em resumo:

Somam-se ou subtraem-se duas matrizes de **mesma ordem** (mesmo tipo) pela soma ou subtração de seus elementos correspondentes.

Formação de uma matriz de ordem (m × n)

Os elementos de uma matriz podem ser definidos por meio de uma função, chamada lei de formação da matriz, que pode ser definida por meio de fórmulas determinadas pelo endereço, ou seja, pela posição da linha e da coluna.

Considere a matriz M, de ordem 2 × 3, isto é, que possui 2 linhas e 3 colunas. Seus elementos são determinados pela fórmula $m_{ij} = 2i^2 - 3j$.

Para calcular os elementos dessa matriz, é interessante visualizá-la na forma geral:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$

Agora, observe o cálculo do valor numérico de seus elementos com base na sua fórmula:

$m_{11} = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$

$m_{12} = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$

$m_{13} = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7$

$m_{21} = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$

$m_{22} = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

$m_{23} = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$

E, a seguir, veja como escrever os valores numéricos na matriz:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Então, considere a matriz N, de ordem 2 × 3, cujos elementos são determinados pela fórmula $n_{ij} = 3i - 2j$:

$n_{11} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$

$n_{12} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$

$n_{13} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 3 - 6 = -3$

$n_{21} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$

$n_{22} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$

$n_{23} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$

Dessa forma, tem-se a matriz N numérica seguinte:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ATIVIDADE 2 Operações com matrizes

1 Considere as matrizes M e N dadas anteriormente, e determine as matrizes pedidas:

a) $A = M + N$

b) $B = N + M$

c) $C = M - N$

d) $D = N - M$

2 Uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas é chamada matriz quadrada. Determine os elementos de cada matriz de acordo com as fórmulas.

a) A é do tipo 2 × 2, determinada pela fórmula $a_{ij} = i \cdot j$.

$$A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

b) B é do tipo 3 × 3, determinada pela fórmula $b_{ij} = i + j$.

$$B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Multiplicação de uma matriz por um número

Sejam uma matriz A e **k** um número real. A matriz E obtida pela multiplicação $E = k \cdot A$ é uma matriz do mesmo tipo, de tal modo que cada elemento de E é dado pela multiplicação de cada um dos elementos da matriz A pelo número **k**. Ou seja, o mesmo que somar a matriz A, **k** vezes.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & \sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $k = 4$.

A matriz $E = 4 \cdot A$ é:

$$E = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot \sqrt{5} \\ 4 \cdot 0 & 4 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 4 & 4\sqrt{5} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, para efetuar a multiplicação de uma matriz por um número, basta multiplicar cada um dos elementos da tabela por esse número.

ATIVIDADE 3 Multiplicação de uma matriz por um número

1 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) 2A

b) 3B

c) 2A + 3B

d) 3A – 2B

2 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule 3A + 2B.

Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes não é tão simples como no caso da adição e da subtração, por isso será explorada por meio de situações-problema.

Uma empresa possui duas confeitarias, D e E (Diamante e Esmeralda), que fabricam três tipos de bolo (1, 2 e 3). Na produção dos bolos são utilizados os seguintes ingredientes: farinha, açúcar, leite, manteiga e ovos. As vendas semanais médias de cada tipo de bolo estão indicadas nas células da tabela que cruza tipos de bolo × padarias, a matriz A, apresentada a seguir.

Matriz A

Bolo / Confeitaria	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Diamante	50	30	25
Esmeralda	20	20	40

Para a fabricação desses bolos, os ingredientes usados são dados de acordo com a matriz B a seguir.

Matriz B

Ingredientes / Bolo	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Tipo 1	500 g	200 g	500 mL	150 g	4
Tipo 2	400 g	100 g	300 mL	250 g	5
Tipo 3	450 g	150 g	600 mL	0	6

Para atender à demanda, é preciso saber a quantidade de cada uma das cinco matérias-primas (os ingredientes) para fornecer a cada uma das confeitarias. O número de ingredientes pode ser organizado e representado por meio de uma matriz C, 2 × 5, em que as linhas representam as duas confeitarias e as colunas correspondem aos cinco ingredientes usados na fabricação dos bolos.

Matriz C

Ingredientes / Confeitaria	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
D	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
E	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}

Matematicamente, pode-se dizer que c_{ij} indica quanto a **i**-ésima confeitaria deve estocar do **j**-ésimo ingrediente a fim de executar as vendas previstas.

Sejam as matrizes **A** e **B**:

$\mathbf{A} = [a_{ij}] \qquad 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 3$

$\mathbf{B} = [b_{ij}] \qquad 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 5$

Pode-se ver que: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j}$

Assim, por exemplo, o número de ovos que a confeitaria D usará para produzir os três tipos de bolo está indicado na célula c_{15}.

Para obter esse valor, multiplicam-se os números da linha 1 da matriz A pelos números da coluna 5 da matriz B e somam-se esses produtos:

$c_{15} = a_{11} \cdot b_{15} + a_{12} \cdot b_{25} + a_{13} \cdot b_{35} = 50 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 25 \cdot 6 = 500$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \mathbf{50} & \mathbf{30} & \mathbf{25} \\ 20 & 20 & 40 \end{bmatrix}} \times \underset{B}{\begin{bmatrix} 500 & 200 & 500 & 150 & \mathbf{4} \\ 400 & 100 & 300 & 250 & \mathbf{5} \\ 450 & 150 & 600 & 0 & \mathbf{6} \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 500 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}}$$

Número de ovos usados pela confeitaria Diamante.

Acompanhe o cálculo dos demais elementos da matriz C.

Consumo de ingredientes na padaria Diamante

- Para obter o valor de c_{11}, multiplicam-se os números da primeira linha da matriz A pelos números da primeira coluna da matriz B e somam-se os produtos:

$c_{11} = 50 \cdot 500 + 30 \cdot 400 + 25 \cdot 450 = 25.000 + 12.000 + 11.250 = 48.250 = 48{,}25$ kg de farinha.

- Cálculo de c_{12}: multiplicam-se os números da primeira linha de A pelos números da segunda coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{12} = 50 \cdot 200 + 30 \cdot 100 + 25 \cdot 150 = 10.000 + 3.000 + 3.750 = 16.750$ g $= 16{,}75$ kg de açúcar.

- Cálculo de c_{13}: multiplica-se a primeira linha de A pela terceira coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{13} = 50 \cdot 500 + 30 \cdot 300 + 25 \cdot 600 = 25.000 + 9.000 + 15.000 = 49.000$ mL $= 49$ L de leite.

- Cálculo de c_{14}: multiplica-se a primeira linha de A pela quarta coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{14} = 50 \cdot 150 + 30 \cdot 250 + 25 \cdot 0 = 7.500 + 7.500 + 0 = 15.000$ g $= 15$ kg de manteiga.

Consumo de ingredientes na padaria Esmeralda

• Cálculo de c_{21}: multiplica-se a segunda linha de A pela primeira coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{21} = 20 \cdot 500 + 20 \cdot 400 + 40 \cdot 450 = 10.000 + 8.000 + 18.000 = 36.000$ g = 36 kg de farinha.

• Cálculo de c_{22}: multiplica-se a segunda linha de A pela segunda coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{22} = 20 \cdot 200 + 20 \cdot 100 + 40 \cdot 150 = 4.000 + 2.000 + 6.000 = 12.000$ g = 12 kg de açúcar.

• Cálculo de c_{23}: multiplica-se a segunda linha de A pela terceira coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{23} = 20 \cdot 500 + 20 \cdot 300 + 40 \cdot 600 = 10.000 + 6.000 + 24.000 = 40.000$ mL = 40 L de leite.

• Cálculo de c_{24}: multiplica-se a segunda linha de A pela quarta coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{24} = 20 \cdot 150 + 20 \cdot 250 + 40 \cdot 0 = 3.000 + 5.000 + 0 = 8.000$ g = 8 kg de manteiga.

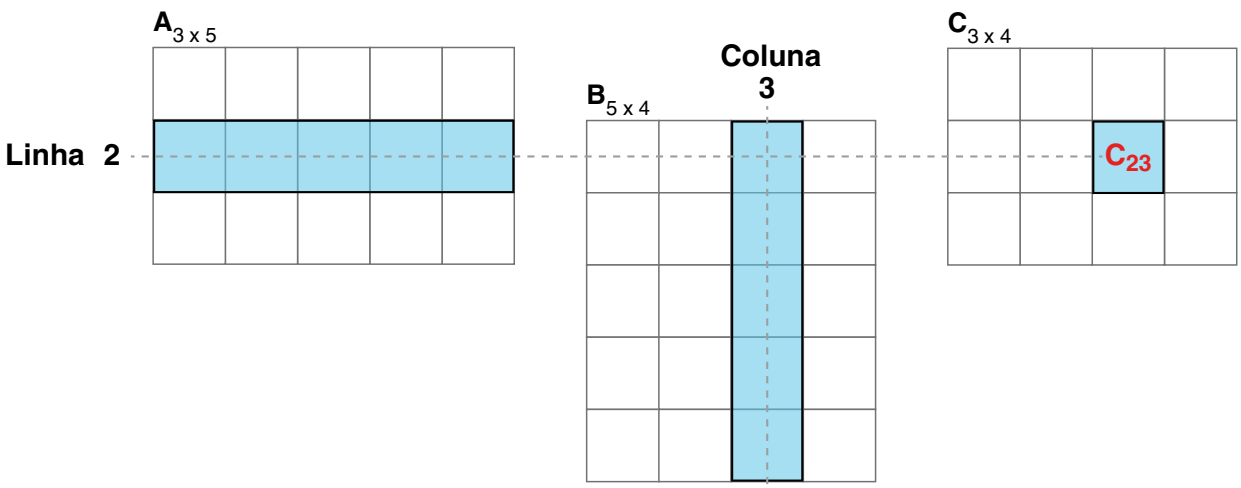
• Cálculo de c_{25}: multiplica-se a segunda linha de A pela quinta coluna de B e somam-se os produtos:

$c_{25} = 20 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 40 \cdot 6 = 80 + 100 + 240 = 420$ ovos.

A matriz C completa fica assim:

$$C = \begin{bmatrix} 48.250 & 16.750 & 49.000 & 15.000 & 500 \\ 36.000 & 12.000 & 40.000 & 8.000 & 420 \end{bmatrix}$$

O esquema a seguir mostra como se obtém o valor da célula c_{23}, resultante da multiplicação das matrizes A · B.



© Daniel Beneventi

Em resumo:

Para fazer o produto das matrizes $A \cdot B$, o número de **colunas** da matriz A (que é a primeira) deve ser igual ao número de **linhas** da matriz B (que é a segunda). Assim, cada elemento c_{ij} do produto $A \cdot B$ é obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma linha **i** de A pelo correspondente elemento de uma coluna **j** de B.

Importante: muitas propriedades existentes nos estudos dos conjuntos dos números reais valem para as operações com as matrizes, por exemplo, a associativa na adição $(A + B) + C = A + (B + C)$, e a comutativa na adição $A + B = B + A$, se A, B e C forem do mesmo tipo. Já a comutativa da multiplicação $A \cdot B = B \cdot A$ não vale para a operação de multiplicação entre matrizes.

PENSE SOBRE...

Esses cálculos parecem muito trabalhosos e, de certo modo, são, mas hoje há programas de computadores que os fazem com rapidez. Basta inserir os valores nas matrizes A e B e o programa fornece a matriz C automaticamente.

ATIVIDADE 4 Multiplicação de matrizes

1 Imagine que o gerente da Oficina do Ferreira estabeleça uma tabela de preços (R$) pelos serviços realizados em cada setor, em função do tipo de veículo.

Valores (R$)

	Pintura (P)	Funilaria (F)	Mecânica (M)
Automóveis	120	80	150
Caminhões	200	300	250

Seja **M** a matriz correspondente:

$$M = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 150 \\ 200 & 300 & 250 \end{bmatrix}$$

Suponha que, em certo dia da semana, a oficina tenha 3 automóveis e 5 caminhões para fazer os três tipos de serviço: P, F e M. Pode-se então associar a matriz N:

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$$

O produto das matrizes N · M = P dá os preços finais que cada seção deve arrecadar. Calcule-os.

$$P = N \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 120 & 80 & 150 \\ 200 & 300 & 250 \end{bmatrix} =$$

2 Suponha que um fabricante de bicicletas tenha uma encomenda de 3 bicicletas para adultos e 4 velocípedes. Para fabricá-los, necessita de material (peças) e serviços (mão de obra). Veja na tabela:

 © Radu Trifan/123RF	Armação	Rodas	Corrente	Tempo de montagem (h)	Tempo de embalagem (h)
Bicicleta	1	2	1	5	1
Velocípede	1	3	0	3	1

A matriz material/mão de obra é $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

O fabricante tem de atender à encomenda das 3 bicicletas e dos 4 velocípedes. De quanto material vai precisar?

Matriz encomenda: $E = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$.

O total de material e mão de obra é dado pela matriz produto P = E · M:

E = matriz encomenda

M = matriz material/mão de obra

P = matriz produto

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \end{bmatrix}$$

a) Calcule o valor dos elementos da matriz produto e responda: Quantas são as armações? E as correntes? E as rodas?

b) Para cada material/mão de obra, o fabricante tem um custo (R$), indicado na tabela:

Material/mão de obra	Custo
Armação	8
Rodas	5
Corrente	5
Montagem	10
Embalagem	3

Esta tabela pode ser representada por uma matriz custo: $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$

O produto da matriz P pela matriz C é a matriz T, de custo total.

Calcule o custo total.

$$T_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \end{bmatrix}$$

3 O sistema de avaliação da Escola do Bairro dá pesos diferentes para as provas, dependendo do bimestre. A matriz A fornece as notas tiradas pelo Juca, e a matriz B indica os pesos das provas em cada bimestre.

a) Complete a matriz K, que fornece o total de pontos acumulados durante o ano letivo.

matriz das notas × matriz dos pesos = matriz total de pontos

$A \cdot B = K$

$$\begin{array}{c} \\ M \\ LP \\ C \\ H \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1b & 2b & 3b & 4b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 7 & 6 & 4 \\ 7 & 10 & 10 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$$

b) A matriz D calcula a média final, que leva em conta os pesos de cada nota: Matemática (M), Língua Portuguesa (LP), Ciências (C), História (H) e Geografia (G). Determine as médias ponderadas de cada disciplina.

Matriz média ponderada das notas: $D = \frac{1}{10} \cdot K$

$$D = \frac{1}{10} \cdot K = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} \begin{matrix} M \\ LP \\ C \\ H \\ G \end{matrix}$$

4 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Agora, calcule as matrizes:

a) $A + B$

b) $A + O$

c) $O + B$

d) $A - B$

e) $B - A$

f) $A \cdot B$

g) $A \cdot I$

h) $I \cdot B$

PARA SABER MAIS

Matrizes nos meios de comunicação

As matrizes estão presentes nos jornais diários, seja nos cadernos de economia, com suas dezenas de tabelas, seja nos cadernos de esportes.

Veja a relação entre multiplicação de matrizes e a classificação no Campeonato Brasileiro de Futebol.

Observe como se determina o total de pontos de um time em um campeonato que atribui os seguintes pesos para as partidas:

- **3** para **vitórias**;
- **1** para **empates**;
- **0** para **derrotas**.

A matriz $C = A \cdot B$ mostra o total de pontos ganhos.

$A_{8\times3}$ = matriz dos 8 primeiros colocados no Campeonato Brasileiro (série A).

$B_{3\times1}$ = matriz dos pontos por vitória, empate e derrota.

$C_{8\times1}$ = matriz do total de pontos ganhos.

	V	E	D
Corinthians	14	7	4
Grêmio	13	6	7
Santos	12	7	7
Internacional	11	8	6
Flamengo	12	4	6
Vasco	9	11	9
Cruzeiro	10	7	6
Bahia	9	9	8

$$\begin{bmatrix} 14 & 7 & 4 \\ 13 & 6 & 7 \\ 12 & 7 & 7 \\ 11 & 8 & 6 \\ 12 & 4 & 6 \\ 9 & 11 & 9 \\ 10 & 7 & 6 \\ 9 & 9 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 12 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ 43 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$$

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Somando e subtraindo matrizes

1

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 5-7 \\ 0-1 & 4-4 \\ -3+3 & 9-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) **F** Pois, na matriz soma, há zeros e números negativos.

b) **F** Pois $a_{32} + b_{32} = 9 + (-5) = 4 \neq 0$.

c) F Pois $a_{22} + b_{22} = 4 + (-4) = 0$.

d) V Pois $a_{31} + b_{31} = -3 + 3 = 0$.

e) V Pois $a_{21} + b_{21} = 0 + (-1) < 0$.

2

a) F

$$2A + C = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 & 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 \cdot 3 + 2 & 2 \cdot 4 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

b) V $A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-2) \\ 3 + (-3) & 4 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ = E. Diz-se que as matrizes A e B são opostas.

c) V $D - A = \begin{bmatrix} 2 - 1 & 4 - 2 \\ 6 - 3 & 8 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$

d) V $2A = D$

e) F $2C + A = B$

f) V $2A + F = G$

3 Não, porque a matriz A é do tipo 2 × 3 e a matriz B é do tipo 3 × 2, ou seja, as duas matrizes não são do mesmo tipo. Só é possível somar ou subtrair matrizes que tenham, respectivamente, o mesmo número de linhas e de colunas.

Atividade 2 - Operações com matrizes

1

a) $A = M + N$

$$A = \begin{bmatrix} -1 + 1 & -4 + (-1) & -7 + (-3) \\ 5 + 4 & 2 + 2 & -1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $B = N + M$

$$B = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & -1 + (-4) & -3 + (-7) \\ 4 + 5 & 2 + 2 & 0 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $C = M - N$

$$C = \begin{bmatrix} -1 - 1 & -4 - (-1) & -7 - (-3) \\ 5 - 4 & 2 - 2 & -1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d) $D = N - M$

$$D = \begin{bmatrix} 1-(-1) & -1-(-4) & -3-(-7) \\ 4-5 & 2-2 & 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Atividade 3 - Multiplicação de uma matriz por um número

1 Calculando as somas e subtrações de matrizes, tem-se:

a) $2A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 4 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

b) $3B = \begin{bmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

c) $2A + 3B = \begin{bmatrix} 21 & 6 & 10 \\ 10 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

d) $3A - 2B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 15 \\ 6 & 9 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 15 \\ 2 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

2 A matriz resultante é $3A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$

Atividade 4 - Multiplicação de matrizes

1

$$P = N \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 120 & 80 & 150 \\ 200 & 300 & 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 120 + 5 \cdot 200 & 3 \cdot 80 + 5 \cdot 300 & 3 \cdot 150 + 5 \cdot 250 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 360 + 1.000 & 240 + 1.500 & 450 + 1.250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.360 & 1.740 & 1.700 \end{bmatrix}$$

A Oficina do Ferreira vai arrecadar R$ 1.360,00 no setor de pintura, R$ 1.740 no setor de funilaria, e R$ 1.700,00 no setor de mecânica de sua oficina.

2

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 + 4 & 6 + 12 & 3 + 0 & 15 + 12 & 3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 18 & 3 & 27 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Interpretação da matriz produto: pela leitura da tabela, pode-se dizer que a oficina vai precisar de 7 armações, 18 rodas e 3 correntes.

b) $$T = \begin{bmatrix} 7 & 18 & 3 & 27 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 8 + 18 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 27 \cdot 10 + 7 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 56 + 90 + 15 + 270 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 452 \end{bmatrix}$$

O custo total é R$ 452,00.

3

a) Matriz das notas multiplicada pela matriz dos pesos resulta na matriz total de pontos em cada disciplina.

$A \cdot B = K$

$$\begin{array}{c} \\ M \\ LP \\ C \\ H \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1b & 2b & 3b & 4b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 7 & 6 & 4 \\ 7 & 10 & 10 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 14 + 18 + 16 \\ 7 + 20 + 30 + 32 \\ 8 + 8 + 15 + 24 \\ 4 + 12 + 21 + 40 \\ 8 + 16 + 24 + 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 89 \\ 55 \\ 77 \\ 80 \end{bmatrix}$$

HORA DA CHECAGEM

b)

$$D = \frac{1}{10} K = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 58 \\ 89 \\ 55 \\ 77 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}8 \\ 8{,}9 \\ 5{,}5 \\ 7{,}7 \\ 8{,}0 \end{bmatrix} \begin{matrix} M \\ LP \\ C \\ H \\ G \end{matrix}$$

O Juca teve média 5,8 em Matemática; 8,9 em Língua Portuguesa; 5,5 em Ciências; 7,7 em História; e 8,0 em Geografia.

4

a) $A + B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 1+2 \\ 1+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $A + O$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $O + B$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 & 0+2 \\ 0+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $A - B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 1-2 \\ 1-1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $B - A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 2-1 \\ 1-1 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

f) $A \cdot B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

g) $A \cdot I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

h) $I \cdot B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Registro de dúvidas e comentários

COMBINATÓRIA

TEMAS

1. Problemas de combinatória

Introdução

A Matemática é uma ciência que apresenta uma variedade de subáreas, como a Aritmética, a Geometria, a Estatística e a Álgebra, entre outras. Há um ramo particular da Matemática que deve ser estudado porque desenvolve um tipo especial de raciocínio e ajuda na resolução de um conjunto de problemas práticos: é a combinatória. É esse assunto que você estudará nesta Unidade.

No seu dia a dia, é provável que já tenha se deparado com ao menos um problema de natureza combinatória, por exemplo, o uso de senhas.

Qualquer pessoa que tenha conta em um banco precisa memorizar uma senha para poder acessar a conta. Ela é uma espécie de chave que protege os dados e o dinheiro. Há senhas de variados tipos: curtas, longas, com números ou letras, ou ainda há uma combinação de letras e números, também chamada alfanumérica.

Problemas de combinatória TEMA 1

Você já teve contato com uma variedade de problemas combinatórios, mesmo sem ter se dado conta. É possível até que tenha resolvido alguns desses problemas usando a intuição, o raciocínio lógico e o que você conhece sobre as operações básicas.

Neste tema, você aprofundará esse conhecimento e aprenderá a combinatória, uma importante ferramenta da Matemática para o cálculo de probabilidades.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você deve conhecer pessoas que fazem seguro de carro ou que jogam na loteria, não é? Você tem ideia de como se define o preço do seguro de um veículo ou quais são as chances de alguém ser sorteado na loteria?

Introdução à combinatória

Observe a análise de uma senha simples, daquelas de cadeados de bicicleta.



?	?	?

De acordo com esse sistema, uma senha é um número que vai de 000 a 999, portanto, para abrir o cadeado, pode-se acertar a senha na primeira tentativa ou ficar tentando até a última combinação; nesse caso, seriam necessárias 1.000 tentativas.

Veja como o raciocínio combinatório ajuda a determinar o total de combinações possíveis.

Para a 1ª posição são possíveis 10 dígitos (de 0 a 9).

10		

Para a 2ª posição também são possíveis 10 dígitos.

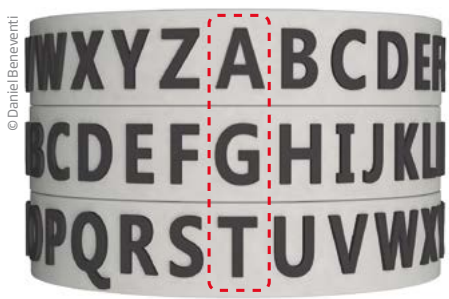
10	10	

E, para a 3ª e última posição, são possíveis 10 dígitos.

10	10	10

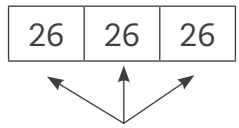
O total de combinações possíveis é $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$.

Imagine agora um cadeado em que o disco de possibilidades comporta as 26 letras do alfabeto.



O número de combinações possíveis de um cadeado desse tipo é muito grande. Acompanhe o cálculo.

Como são 26 as letras do alfabeto, para acertar a letra de cada disco há 26 possibilidades. Combinando os três discos, tem-se:



Possibilidades em cada disco

O total de combinações possíveis é $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17.576$.

O raciocínio utilizado para determinar o total de combinações em um cadeado é semelhante ao que se emprega na resolução de outros problemas de natureza combinatória. Veja alguns exemplos.

Exemplo 1. Em determinada lanchonete, é possível montar sanduíches escolhendo entre 4 tipos de pão e 5 tipos de recheio. Para determinar todas as possibilidades de sanduíches, raciocina-se do seguinte modo:



Total de combinações: $4 \cdot 5 = 20$.

Exemplo 2. Numa competição, 3 atletas disputam os 3 primeiros lugares do pódio. Quantos são os resultados possíveis?

Imagine que os atletas são A, B e C. Nesse caso, são 6 os resultados possíveis:

A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Para chegar a esse resultado por meio do cálculo, raciocina-se do seguinte modo: os 3 atletas, A, B e C, têm chances de chegar em 1º lugar. Suponha que B chegue primeiro:

B		

Agora há apenas 2 possibilidades para o 2º lugar; suponha que A chegue em seguida.

B	A	

Como só resta um atleta para a última posição, que é C, o número de possibilidades é 1.

B	A	C

O número total de combinações de chegada para os 3 atletas às 3 primeiras posições é:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

O resultado | B | A | C | é um entre os 6 possíveis.

Exemplo 3. Nas Copas do Mundo de futebol masculino, 32 equipes são distribuídas em 8 grupos com 4 equipes em cada um. Nos grupos, as seleções jogam entre si. Você sabe quantos jogos são realizados em cada grupo?

Nesse caso, não será feita a combinação listando-se os jogos. Para o cálculo de quantos jogos devem ser realizados, será utilizado o raciocínio combinatório. Acompanhe:

- são 4 equipes;
- cada equipe joga com todas as outras do mesmo grupo;
- portanto, cada equipe faz 3 jogos, pois uma equipe não joga com ela mesma;
- o total de jogos então seria 4 · 3;
- mas um jogo do tipo "equipe A × equipe B" é o mesmo jogo do tipo "equipe B × equipe A". Logo, no cálculo anterior, cada jogo está sendo contado duas vezes;
- para corrigir isso, divide-se o resultado 4 · 3 por 2;
- total de jogos: $T = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Exemplo 4. Numa empresa, os funcionários organizaram um bolão, do tipo loteria esportiva, em que os apostadores devem tentar acertar o resultado de 5 jogos.

Veja um modelo de cartela com um resultado marcado.

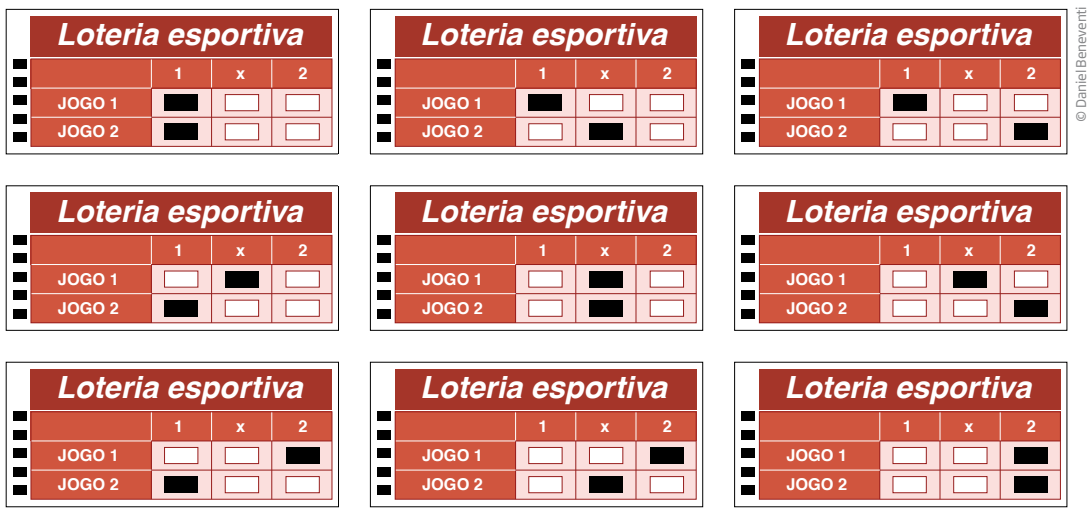


© Daniel Beneventi

Jogar na coluna 1 significa apostar na vitória do time da casa; jogar na coluna do meio (×) significa apostar no empate entre as duas equipes; e marcar a coluna 2 significa apostar na vitória do time visitante (e derrota do time da casa).

Há 3 resultados possíveis para o jogo 1 (coluna 1, do meio ou 2); 3 para o jogo 2; 3 para o jogo 3; 3 para o jogo 4; e 3 para o jogo 5.

O total de combinações possíveis, por exemplo, para os dois primeiros jogos é:



3 · 3 = 9 resultados diferentes

Como são 5 jogos, o número de combinações possíveis é:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ resultados diferentes.

Exemplo 5. Quantos números de 3 algarismos é possível formar com os números 0, 1, 2, 3 e 4?

Os números que se podem formar são da ordem das centenas, portanto devem ser números maiores que 99 e menores que 1.000. Isso quer dizer que o número não pode começar por 0 (zero), pois nesse caso o número não seria de 3 dígitos. Por exemplo, um número como 072 é menor que 99.

Assim, usando o raciocínio combinatório, são apenas 4 as possibilidades para preencher o algarismo das centenas, com os dígitos 1, 2, 3 e 4. Para a casa das dezenas e das unidades, pode-se escolher qualquer dígito, inclusive o 0 (zero). O total de combinações possíveis é:

$$\boxed{4} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5}$$

Total: 100 combinações.

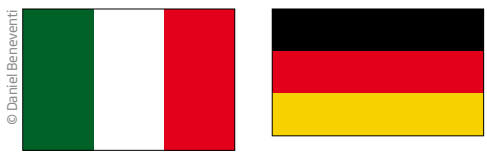
Exemplo 6. Quantos são os números pares de 3 dígitos que se podem formar com os números de 1 a 6?

Este problema é semelhante ao do exemplo 5, mas a restrição está na casa das unidades, que só pode ter os algarismos 2, 4 ou 6. Portanto, pode-se fazer a combinação raciocinando de trás para frente, começando pela casa das unidades, que tem 3 possibilidades de preenchimento, enquanto as casas das dezenas e das centenas têm 6 possibilidades cada.

$$\boxed{6} \cdot \boxed{6} \cdot \boxed{3}$$

O total de combinações possíveis é 108.

Exemplo 7. As bandeiras de determinados países, como a da Itália e a da Alemanha, são formadas por listras verticais ou horizontais.


© Daniel Beneventi

Um time de futebol resolveu criar uma bandeira com 4 listras horizontais de mesma espessura nas cores vermelha, amarela e verde. Quantas bandeiras diferentes podem ser criadas com essa regra?

1ª listra
2ª listra
3ª listra
4ª listra

Há 3 possibilidades de escolha para a cor da primeira listra, mas só há 2 possibilidades de cor para a 2ª listra, pois, ao se repetir a cor da 1ª listra, haverá uma única listra grossa, e as bandeiras têm que ter 4 listras de mesma espessura. Do mesmo modo, a cor da 3ª listra não pode repetir a cor da 2ª listra, e a 4ª listra não pode ser da mesma cor da 3ª. Logo, para determinar todas as possibilidades, basta multiplicar:

$$\boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} = 24$$

Com essas regras, é possível construir 24 bandeiras diferentes.

Princípio fundamental da contagem

O raciocínio utilizado em todos os problemas propostos até aqui utiliza o que se chama de **princípio fundamental da contagem (PFC)**, ou princípio multiplicativo, que poderia ser expresso do seguinte modo:

> Se um evento (acontecimento, escolha ou combinação) é composto de **k** etapas distintas, a 1ª etapa pode ocorrer de **n** maneiras distintas, a 2ª etapa de **m** maneiras distintas, a 3ª etapa de **p** maneiras distintas, e assim sucessivamente. Então, o evento poderá ocorrer por meio do produto entre as etapas.

ATIVIDADE 1 Problemas de combinatória e o princípio fundamental da contagem

1 Marta tem 5 saias, 6 blusas e 4 pares de sapatos. De quantos modos diferentes ela pode se vestir combinando saia, blusa e sapatos?

2 Numa lanchonete, é possível montar o próprio sanduíche combinando 5 tipos de pão, 6 tipos de recheio e 3 tipos de molho. Quantos sanduíches diferentes podem ser montados?

3 Quantos são os jogos de um campeonato de futebol que tem turno (jogos de ida) e returno (jogos de volta), do qual participam 20 equipes?

4 Num campeonato com 8 equipes, todos jogam contra todos apenas uma vez. Quantos jogos são realizados nesse campeonato?

5 Numa festa, há 8 moças e 9 rapazes. Se todos dançarem com todos, quantos pares diferentes é possível formar?

6 O segredo de um cadeado é formado pelos números de 0 a 9, que estão em cada um de seus 4 discos. Determine o total de combinações possíveis.

7 O sistema de emplacamento de veículos no Brasil já teve vários modelos. De 1969 até 1990, era adotado um sistema que utilizava 2 letras e 4 números.



© Daniel Beneventi

Supondo que não haja restrições para a formação das placas, determine o total de combinações possíveis que esse sistema permitia.

8 A partir de 1990, passou a vigorar o sistema de 3 letras e 4 números. Determine o total de carros que podem ser emplacados de acordo com esse sistema.



© Daniel Beneventi

9 Em alguns países, como a Argentina, as placas dos veículos são compostas por 3 letras seguidas de 3 números. Determine quantas combinações são possíveis nesse caso.



© Daniel Beneventi

10 Descubra qual dos sistemas possibilita emplacar mais veículos:

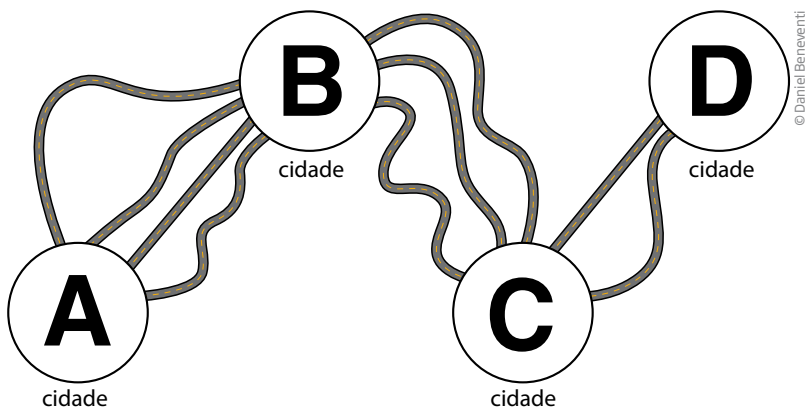
a) um que utiliza 3 letras e 3 números ou outro que utiliza 2 letras e 4 números?

b) um que utiliza 2 letras e 5 números ou outro que utiliza 3 letras e 3 números?

11 Uma cidade foi formada, e seus habitantes decidiram que a bandeira será um retângulo com 4 listras verticais em que as cores poderão ser escolhidas entre vermelho, azul, verde e amarelo. Com essas regras, quantas bandeiras diferentes podem ser feitas?

12 Quatro cidades estão interligadas por meio de um conjunto de estradas. Para ir da cidade A à cidade D, é preciso passar pelas cidades B e C, que ficam no meio do caminho.

Para ir da cidade A à cidade B, há 4 estradas; da cidade B à cidade C, há 3 estradas; e da cidade C à cidade D, 2 estradas. Determine o total de caminhos possíveis para se ir:



a) de B até C

b) de D até B

c) de A até D

d) de B até D

13 Uma pessoa utiliza um dado cúbico (de 6 faces) para escolher números de 2 dígitos que serão usados como códigos. Para isso, ela joga o dado duas vezes: a primeira para escolher o algarismo das dezenas, e a segunda para escolher o algarismo das unidades.

a) Quantos números de dois dígitos podem ser formados?

b) Quantos números pares podem ser formados?

c) Quantos números ímpares podem ser formados?

d) Quantos números múltiplos de 5 podem ser formados?

14 Usando o mesmo dado, determine quantos números pares de 3 dígitos é possível formar.

15 Quantos números de 3 algarismos distintos existem em nosso sistema decimal?

DESAFIO

Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número um (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras, com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

a) 120
b) 62
c) 60
d) 20
e) 10

Unesp 2004. Disponível em: <http://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada/Unesp/2004/1dia/UNESP2004_1dia.pdf>. Acesso em: 30 out. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Problemas de combinatória e o princípio fundamental da contagem

1 Aplicando o princípio fundamental da contagem, as possibilidades são $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$. Marta pode fazer combinações de saias, blusas e sapatos de 120 maneiras diferentes.

2 Na lanchonete, as combinações possíveis são de $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ tipos de sanduíches.

3 No primeiro turno, cada uma das 20 equipes joga com 19 adversários, em um total de $20 \cdot 19 = 380$ jogos. Mas como, por exemplo, Corinthians × Palmeiras e Palmeiras × Corinthians é o mesmo jogo, é preciso dividir o resultado por 2, pois, do modo calculado, cada jogo é contado duas vezes. No primeiro turno, portanto, haverá $380 \div 2 = 190$ jogos, o mesmo número de jogos do returno. No total, são 380 jogos no campeonato.

4 Cada uma das equipes joga com as outras 7 uma única vez, portanto $8 \cdot 7 = 56$. Divide-se por 2 para se eliminarem as duplicações → $56 \div 2 = 28$ jogos realizados no campeonato.

5 $8 \cdot 9 = 72$ pares diferentes. Cada uma das 8 moças dança com os 9 moços.

6 Cada disco do cadeado permite 10 alternativas de escolha. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, existem $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$ combinações.

7 Como são 26 as letras do alfabeto, são $26 \cdot 26$ os agrupamentos diferentes que podem ser feitos com 2 letras e $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ agrupamentos diferentes com os 4 números.

Total: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6.760.000$.

Prevendo que o número de automóveis no Brasil superaria essa marca, o governo mudou o sistema de placas.

8 Usando o raciocínio do exercício anterior, tem-se que $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$ carros podem ser emplacados de acordo com esse sistema.

9 São possíveis $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17.576.000$ combinações de placas.

10

a) Compare os dois sistemas:

$26 \cdot 26 \cdot \mathbf{26} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

$26 \cdot 26 \cdot \mathbf{10} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

Os dois números diferem em apenas um fator e $26 > 10$. O primeiro sistema permite que sejam feitos $\frac{26}{10} = 2{,}6$ vezes mais emplacamentos.

b) Compare os dois sistemas

$26 \cdot 26 \cdot \mathbf{10} \cdot \mathbf{10} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

$26 \cdot 26 \cdot \mathbf{26} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

Nesse caso, o primeiro sistema permite mais emplacamentos, pois $10 \cdot 10 > 26$. Ele permite que sejam feitos $\frac{100}{26} = 3{,}84$ vezes mais emplacamentos.

11 Pelo princípio fundamental da contagem, há 4 possibilidades para a primeira listra e 3 para as demais $\rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ bandeiras diferentes.

12 Para resolver cada item, basta utilizar o princípio fundamental da contagem:

Cidades A $\xrightarrow[4 \text{ estradas}]{}$ B $\xrightarrow[3 \text{ estradas}]{}$ C $\xrightarrow[2 \text{ estradas}]{}$ D

a) Há 3 estradas de B até C.

b) $2 \cdot 3 = 6$ caminhos diferentes.

c) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ caminhos diferentes.

d) $3 \cdot 2 = 6$ caminhos diferentes.

Atente para o fato de que, ao ir de D para B, o número de caminhos é o mesmo que ir de B para D.

13

a) $6 \cdot 6 = 36$ (pois é permitida a repetição; um número como 44, por exemplo, é um número de dois dígitos).

b) Para que o número seja par, tem que terminar em 2, 4 ou 6 (números pares das faces de um dado), então $6 \cdot 3 = 18$.

c) Para cada posição na casa das dezenas, há 6 possibilidades; para a casa das unidades, apenas 3 (faces 1, 3 e 5). Assim, $6 \cdot 3 = 18$ números ímpares. Observe que o número de possibilidades de ocorrência de pares e ímpares é o mesmo, e que 18 é a metade de 36 ($6 \cdot 6 = 36$ faces).

d) Para que um número seja múltiplo de 5, o algarismo das unidades tem que ser 0 (zero) ou 5. Como não existe uma face do dado com 0, só é possível sair o 5. O número de possibilidades é $6 \cdot 1 = 6$ (são os números 15, 25, 35, 45, 55 e 65).

14 Para cada posição na casa das centenas e das dezenas, há 6 possibilidades; para a casa das unidades, apenas 3 (faces 2, 4 e 6). As combinações possíveis são $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$.

15 Para a casa das centenas, são possíveis 9 dígitos, pois um número de 3 algarismos não pode começar com zero; para a casa das dezenas, há também 9 possibilidades, uma vez que só não se pode utilizar o número escolhido para a casa da centena; por fim, para a casa das unidades, há 8 possibilidades (não é possível usar os dois números já utilizados).

Pelo princípio fundamental da contagem, tem-se $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$, que é o total de números com 3 algarismos distintos existente em nosso sistema decimal.

Desafio

Alternativa correta: **b**. Considerando que, em cada caso, a repetição de símbolos é possível, tem-se:

(1) símbolo: 0,1 → 2 possibilidades
(2) símbolos: $2 \cdot 2$ → 4 possibilidades
(3) símbolos: $2 \cdot 2 \cdot 2$ → 8 possibilidades
(4) símbolos: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ → 16 possibilidades
(5) símbolos: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ → 32 possibilidades

$\Rightarrow$ Total → $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$

HORA DA CHECAGEM



Registro de dúvidas e comentários

PROBABILIDADE

TEMAS

1. Introdução à Probabilidade

Introdução

Você já prestou atenção nas previsões do tempo que são comunicadas nos noticiários de TV? Se o apresentador diz que poderá chover no dia seguinte, você pode ter certeza de que choverá?

E um campeonato que está nas rodadas finais, se os especialistas disserem que determinado time tem 90% de chance de ser campeão, significa que a taça está garantida para essa equipe?

Você sabia que o preço do seguro de um automóvel é calculado de acordo com o perfil do motorista? Se o motorista for mais jovem, o seguro pode ficar mais caro; se for uma mulher, pode ficar mais barato. Por que será?

Essas e outras situações do dia a dia envolvem a ideia de incerteza e um campo da Matemática com ampla aplicação em várias áreas do conhecimento: a Probabilidade.

Introdução à Probabilidade — TEMA 1

Neste tema, você verá como é possível quantificar um evento incerto por meio de um número ou uma função matemática.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Provavelmente você já ouviu a previsão do tempo, não é? Como será que ela é feita? É possível confiar nas previsões com toda certeza? Por quê?

A incerteza

Muitas são as situações em que não é possível prever um resultado ou ter certeza de que algo poderá ou não acontecer. É o caso das previsões do tempo e outros fenômenos da natureza, como a erupção de vulcões ou a ocorrência de terremotos, tufões e *tsunamis*.

Além dessas, há ainda outras situações cujo resultado não pode ser previsto, como sorteios, lançamento de dados ou uma simples disputa de “cara ou coroa”; sequer é possível determinar, logo após a concepção, o sexo de um bebê que vai nascer. O ramo da Matemática que estuda as leis do acaso chama-se **probabilidade**.

Analise com atenção a situação descrita a seguir.


© Simon Belcher/Alamy/Glow Images

No início de uma partida de futebol, é comum o juiz jogar uma moeda para o alto, para que o capitão de cada time decidam na sorte quem começa o jogo.

Ao jogar uma moeda e observar a face voltada para cima, há apenas dois resultados possíveis: **cara** ou **coroa**. A chance de ocorrer cara ou coroa é a mesma. Diz-se, portanto, que a probabilidade de sair cara é a mesma de sair coroa.

Fotos: © snehit/123RF



Coroa


Cara

Analise agora outra situação.

Em uma empresa, o encarregado de uma seção decidiu colocar em uma urna o nome de todos os funcionários para sortear quem participaria da comissão da empresa. Quem tem a maior probabilidade de ser sorteado: um homem ou uma mulher?

Para responder a essa questão, é necessário saber o número de funcionários e de funcionárias. Suponha que a seção em que trabalha esse encarregado tenha 25 mulheres e 15 homens. Nesse caso, como você estudará adiante, é mais provável que seja sorteada uma mulher. Entretanto, se o número de homens e mulheres for o mesmo, as chances são iguais. E, se o número de funcionários for maior que o número de funcionárias, é mais provável que um homem seja sorteado.

Em qualquer um dos casos anteriores, o resultado do sorteio não pode ser previsto com certeza; é possível avaliar, apenas, qual resultado tem maiores chances de ocorrer. Não é impossível que um homem seja sorteado se a seção tiver 5 homens e 35 mulheres, só é mais difícil.

A situação de incerteza também ocorre no lançamento de um dado. Ao jogar um dado com as 6 faces numeradas com pontos e observar a face voltada para cima, quais são os resultados prováveis?


© Gjermund Alsos/123RF

Suponha que seja um **dado honesto**. A chance de ocorrer a face com 1 ponto é a mesma de ocorrer a face com 2, que, por sua vez, é a mesma de ocorrer a com 3, 4, 5 ou 6 pontos.

Contextos de lançamento de moedas e dados são imprevisíveis, tais como os contextos que envolvem sorteios.

Dado honesto

A mesma probabilidade de ocorrência de qualquer uma das faces de um dado. Quando isso não acontece, diz-se que o dado é *viciado*.

Reflita sobre o caso em que foram colocadas 10 bolinhas de gude do mesmo tamanho, sendo 6 azuis e 4 vermelhas, dentro de um saco.


© Daniel Beneventi

Extraindo uma bolinha ao acaso, sem olhar, pode-se retirar do saco uma bolinha azul ou uma bolinha vermelha, mas as cores têm chances diferentes de serem sorteadas por haver um número diferente de bolinhas de cada cor.

ATIVIDADE 1 Exercitando probabilidades

1 Em uma classe com 22 meninas e 13 meninos, foi realizado um sorteio. Quem tem a maior probabilidade de ser sorteado: um menino ou uma menina?

---

2 Em uma classe de EJA, 21 estudantes fazem aniversário no primeiro semestre, e 15, no segundo semestre. Ao sortear um estudante ao acaso, é mais provável que o sorteado seja um aniversariante do 1º ou do 2º semestre?

---

3 Na empresa de João, o nome de metade dos funcionários começa por vogal; o dos demais, por consoante. Os nomes dos funcionários foram escritos em pequenos papéis e, depois, colocados em uma urna. Ao sortear um papel ao acaso, é mais provável que o nome escrito nele comece por vogal ou por consoante?

---

4 Considere o lançamento de um dado cúbico (de 6 faces) e a observação da face voltada para cima. Responda o que é mais provável ocorrer:

a) Par ou ímpar?

---

b) Um número primo ou um número composto?

---

c) Um número maior ou menor que 3?

---

5 Em um saco, foram colocadas 4 bolas amarelas e 6 bolas vermelhas. Qual é a cor mais provável de ser retirada ao acaso?

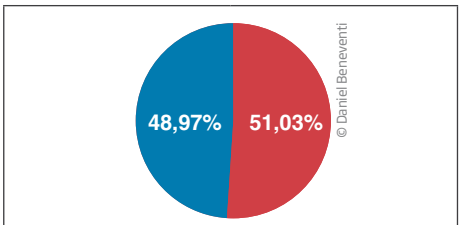
---

6 Em uma urna, foram colocados envelopes de cores diferentes: 15 cor-de-rosa, 10 azuis e 20 verdes. Ao sortear um envelope ao acaso, qual é a cor que tem mais chance de sair?

Chances iguais

Maria vai ter um bebê. Qual é a probabilidade de nascer uma menina?

O último Censo Demográfico, realizado em 2010 pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), indicava que a população brasileira do sexo feminino era maior que a do sexo masculino. Veja a tabela e o gráfico a seguir.



Homens	Mulheres
93.406.990	97.348.809
48,97 %	51,03 %

Os números sugerem certo equilíbrio entre homens e mulheres, em torno de 50% para cada sexo.

A diferença de cerca de 2% entre o número de homens e mulheres na população brasileira é atribuída a fatores sociais como violência urbana, acidentes, tabagismo, consumo de bebidas alcoólicas etc., e não às chances de nascimento, que são iguais, ou seja, 50%.

Experimentando e medindo frequências

A probabilidade de ocorrência de um evento pode ser medida e expressa por meio de um número, em geral uma fração ou uma porcentagem.

Para compreender melhor como se pode determinar esse número, costumam-se fazer alguns experimentos, por exemplo, lançar uma moeda para cima e construir uma tabela que indique a quantidade de caras e de coroas obtidas em 10 jogadas.

Quando o número de jogadas é pequeno, não é possível notar um padrão, mas, ao aumentar o número de jogadas para 20, 30, 50 ou 100 vezes, é possível perceber uma tendência. Veja, por exemplo, a tabela a seguir com o registro da ocorrência de caras e coroas:

Quantidade de jogadas	Caras	Coroas
10	3	7
15	8	7
20	11	9
25	12	13
30	14	16
50	22	28
100	52	48

Qual é o número de caras esperado, caso você jogue 1.000 vezes a moeda?

Se tiver a oportunidade de fazer o experimento com moedas honestas, espera-se que a ocorrência de caras e coroas seja próxima de 50% à medida que se aumenta o número de jogadas. O resultado pode variar, como 495 caras e 505 coroas, ou 502 caras e 498 coroas. Não importa qual número é maior, se o de caras ou o de coroas, é bem provável que fique próximo de 500 nos dois casos.

A medida da chance: probabilidade

No caso do lançamento de uma moeda, você já deve ter observado que, se o número de jogadas aumentar, a razão entre o número de caras e o total de lançamentos tende a ficar em torno de $\frac{1}{2}$. Diz-se, então, que a probabilidade de dar cara é de "1 para 2", ou $\frac{1}{2}$, ou 50%.

O evento "cara" é um dos dois casos prováveis. Simbolicamente, escreve-se:

$$P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$$

Ou seja: 1 chance em 2 possíveis.

Ao lançar uma moeda para o alto, os únicos resultados prováveis são cara ou coroa. Se der cara, não dá coroa, e vice-versa.

Imagine duas pessoas, João e Maria, que jogam "cara ou coroa" com duas moedas. João apostou que consegue duas coroas, e Maria apostou que obterá duas faces diferentes da moeda. Quem tem mais chances de ganhar a aposta?

Veja os casos possíveis:

João	Maria	
		← 1 cara, 1 coroa: Maria ganha.
		← 2 caras: ninguém ganha.
		← 1 coroa, 1 cara: Maria ganha.
		← 2 coroas: João ganha.

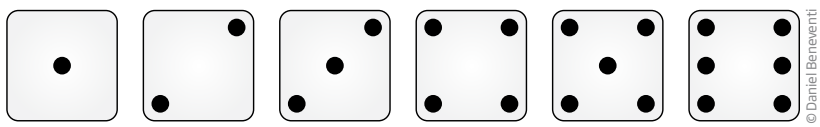
Fotos: © snehit/123RF

Observe que determinar a chance de ocorrência de um evento depende do fato de saber quais são as possibilidades do evento ocorrer no conjunto de todos os resultados possíveis.

No caso, Maria tinha 2 chances em 4 resultados possíveis, ou seja, ela tinha 50% de chances de ganhar, enquanto João só ganharia em 1 caso entre os 4 resultados possíveis, ou seja, sua chance era de 1 em 4, ou 25%. Assim, a chance de Maria ganhar a aposta era maior.

Probabilidades com dados e sorteios

Agora, você vai aprender a calcular a probabilidade, por exemplo, no lançamento de dados. Como são dados cúbicos, o número de casos possíveis no lançamento de apenas um dado é 6:


© Daniel Beneventi

A face que representa o número 1 é uma possibilidade entre seis.

Quando se quer se referir à probabilidade de ocorrer um evento **E**, escreve-se P(E).

Em um total de **n** ocorrências igualmente prováveis, um evento **E** pode ocorrer de **f** maneiras diferentes.

Portanto, a probabilidade de ocorrência do evento **E**, indicada por P(E), é dada por: $P(E) = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{f}{n}$, em que **P(E)** é a probabilidade de ocorrência de um evento **E**; **f** é o número de casos favoráveis à ocorrência do evento; e **n** é o número de casos possíveis.

Parece complicado, porque a representação se deu por meio de linguagem algébrica. Observe os exemplos a seguir.

As chances de as faces 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 ficarem voltadas para cima são as mesmas; portanto, $P(1) = \frac{1}{6}$ (em porcentagem, essa fração equivale a, aproximadamente, 16,67%).

Logo, $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

Utilize essas ideias e a notação **P(E)** para explorar algumas situações e determinar a probabilidade de sua ocorrência.

Exemplo 1. Se em um saco há 5 bolas azuis e 3 vermelhas, extraindo ao acaso uma bola, tem-se:

Total de bolas: 8

$$P(\text{azuis}) = \frac{\text{quantidade de bolas azuis}}{\text{total de bolas}} = \frac{5}{8} \text{ ou } 62{,}5\%$$

Para expressar essa probabilidade em porcentagem, basta dividir 5 por 8. Se você fizer a operação na calculadora, no visor aparecerá 0,625, que equivale a 62,5%.

$$P(\text{vermelhas}) = \frac{\text{quantidade de bolas vermelhas}}{\text{total de bolas}} = \frac{3}{8} \text{ ou } 37{,}5\%$$

3 dividido por 8 é igual a 0,375, que equivale a 37,5%.

$$P(\text{azuis}) + P(\text{vermelhas}) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

62,5% + 37,5% = 100%

Exemplo 2. Considere uma empresa com 40 funcionários, metade homens e metade mulheres.

a) Qual é a probabilidade de, em um sorteio, uma mulher ser escolhida para ser representante em uma comissão?

Número de mulheres: $\frac{40}{2} = 20$

P(mulher) = $\frac{20}{40}$ ou, simplificando, $\frac{1}{2}$, que equivale a 50%

b) Supondo que cada funcionário esteja associado a um número de 1 a 40, qual é a chance de ser sorteado um funcionário cujo número é ímpar e maior que 25?

São 7 os números ímpares maiores que 25 e menores que 40: {27, 29, 31, 33, 35, 37, 39}.

P(ímpares maiores que 25 e menores que 40) = $\frac{7}{40}$ = 0,175, que equivale a 17,5%

c) Em relação ao item *b*, qual é a chance de ser sorteado um número primo?

Há 12 números primos entre 1 e 40: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}.

P(primo) = $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

Observe que $\frac{3}{10}$ é equivalente a $\frac{30}{100}$. Assim, pode-se também expressar a probabilidade por meio de uma porcentagem: há 30% de chance de um número primo ser sorteado.

Exemplo 3. Em um globo, daqueles de sorteio, foram colocadas bolinhas numeradas de 1 a 12, e, depois, uma bolinha foi sorteada ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de sair o número 2? Será que a probabilidade de sair o número 3 é maior que a de sair o número 2?

O 2 é uma de 12 possibilidades; o mesmo acontece com o 3. Isso quer dizer que a probabilidade de sair cada número é a mesma, no caso:

$$P(2) = P(3) = \frac{1}{12}$$

b) E a probabilidade de sair um número primo, qual é?

Para responder a essa questão, é preciso conhecer o universo de possibilidades. Nesse caso, o conjunto de todas as possibilidades é:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Para saber qual é a probabilidade de sair um número primo, basta listar quantos são os números primos nas bolinhas: {2, 3, 5, 7, 11}.

Há 5 possibilidades de ocorrência de números primos em 12 casos possíveis:

$$P(\text{primo}) = \frac{5}{12}$$

Conhecendo o número de casos favoráveis e o total de casos, é possível responder a muitas questões sobre probabilidade.

ATIVIDADE 2 Calculando probabilidades

1 Em um saco, foram colocadas 4 bolas amarelas e 6 bolas vermelhas. Calcule a probabilidade de cada cor ser escolhida ao acaso.

2 Em uma urna, foram colocados envelopes de cores diferentes: 15 amarelos, 10 azuis e 20 verdes. Calcule a probabilidade de cada cor ser sorteada.

3 Em uma classe com 20 meninas e 15 meninos, foi realizado um sorteio. Qual é a probabilidade de o sorteado ser um menino? E de ser uma menina?

4 Em um globo, daqueles de sorteio, foram colocadas bolinhas numeradas de 1 a 50. Uma bolinha é sorteada ao acaso. Calcule a probabilidade de ser sorteado um número:

a) par

b) múltiplo de 3

c) múltiplo de 5

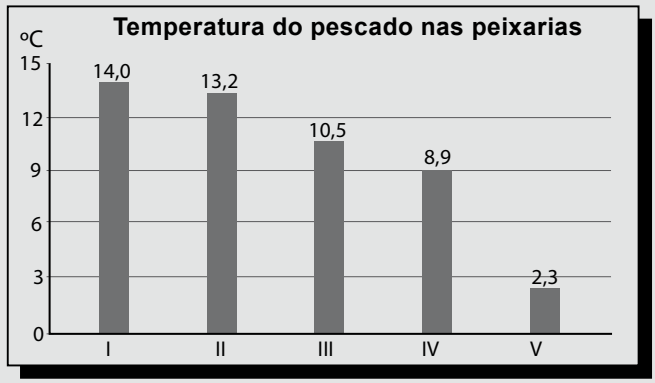
d) primo

e) maior que 25

5 Em relação ao globo do exercício anterior, há mais chances de ser sorteada uma bolinha que tenha um número primo ou um número múltiplo de 3?

DESAFIO

1



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

Enem 2007. Prova amarela. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2007/2007_amarela.pdf>. Acesso em: 30 out. 2014.

2 André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar, lançando as duas moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecerem duas coroas, André lavará a louça; se aparecerem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecerem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:

a) 25%.

b) 27,5%.

c) 30%.

d) 33,3%.

e) 50%.

Universidade Federal do Paraná (UFPR), 2012. Disponível em: <http://www.nc.ufpr.br/concursos_institucionais/ufpr/ps2012/provas1fase/PS2012_conhecimentos_gerais.pdf>. Acesso em: 30 out. 2014.

PENSE SOBRE...

O cálculo de probabilidades é usado em quase todos os assuntos e campos da ciência, como Meteorologia e Genética.

Será que é importante conhecer a possibilidade de algum fenômeno acontecer?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Exercitando probabilidades

1 22 > 13, portanto, é mais provável que uma menina seja sorteada.

2 21 > 15, portanto, é mais provável que um estudante que faça aniversário no 1º semestre seja sorteado.

3 As chances são as mesmas.

4

a) São ímpares 1, 3 e 5; são pares 2, 4 e 6. São 3 ocorrências de ímpares e 3 ocorrências de pares; portanto, as chances são iguais.

b) São primos 2, 3 e 5; são compostos 4 e 6 (1 não é primo nem composto). São 3 ocorrências de primos e 2 ocorrências de compostos; portanto, há mais probabilidade de sair um número primo.

c) Números maiores que 3 são 4, 5 e 6; números menores que 3 são 1 e 2. São 3 ocorrências de números maiores que 3 e 2 ocorrências de números menores que 3; portanto, é mais provável sair um número maior que 3.

5 4 < 6; portanto, é mais provável sair uma bola vermelha.

6 20 > 15 > 10; portanto, há mais chance de sair um envelope verde que um envelope cor-de-rosa; o envelope cor-de-rosa, por sua vez, tem mais chance de sair que um envelope azul.

Atividade 2 - Calculando probabilidades

1 Total de bolas → 4 + 6 = 10.

$P(\text{amarela}) = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%$

$P(\text{vermelha}) = \frac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$

2 $P(\text{amarelo}) = \frac{15}{45} \cong 0{,}33 = 33\%$; $P(\text{azul}) = \frac{10}{45} \cong 0{,}22 = 22\%$;

$P(\text{verde}) = \frac{20}{45} \cong 0{,}44 = 44{,}4\%$

3 O total de estudantes é 20 + 15 = 35

$P(\text{menino}) = \frac{15}{35} \cong 0{,}429 \cong 42{,}9\%$

$P(\text{menina}) = \frac{20}{35} \cong 0{,}571 \cong 57{,}1\%$

4

a) 25 das 50 bolinhas do globo têm número par.

$P(\text{par}) = \frac{25}{50} = 0{,}5 = 50\%$ de probabilidade.

b) Os múltiplos de 3 no globo são 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45 e 48, ou seja, 16 casos em 50.

$P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{16}{50} = 0{,}32 = 32\%$ de probabilidade.

c) Há 10 múltiplos de 5 no globo; são eles 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 e 50.

$P(\text{múltiplo de 5}) = \frac{10}{50} = 0{,}20 = 20\%$ de probabilidade.

d) As bolinhas do globo que têm números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47, ou seja, 15 casos em 50.

$P(\text{primo}) = \frac{15}{50} = 0{,}3 = 30\%$ de probabilidade.

e) Há 25 bolinhas com números maiores que 25.

5 $P(> 25) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 50\%$ de probabilidade.
$P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{16}{50}$; $P(\text{primo}) = \frac{15}{50}$; como $\frac{16}{50} > \frac{15}{50}$, a probabilidade de sair um múltiplo de 3 é maior, embora os valores sejam próximos.

Desafio

1 Alternativa correta: **d**. Analisando o gráfico, a única peixaria disponível que atende às condições de temperatura é a de número V (2,3 °C); logo, E = 1 entre as cinco peixarias pesquisadas. Então, $P(E) = \frac{1}{5}$

2 Alternativa correta: **e**. Chamando de **S** todos os resultados possíveis ao se lançar duas moedas, tem-se:

S = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, coroa); (coroa, cara)}

O evento **E** é "sair uma cara e uma coroa" para que João lave a louça:

E = {(cara, coroa), (coroa, cara)}

Logo, a probabilidade de João ser sorteado para lavar a louça será de:

$P(E) = \frac{2}{4} = 50\%$

A MATEMÁTICA NA COMUNICAÇÃO

TEMAS

1. O significado dos códigos
2. Média aritmética nos meios de comunicação e na vida cotidiana

Introdução

Nesta Unidade, você vai estudar porcentagens, gráficos e outras formas pelas quais as informações matemáticas são veiculadas nos meios de comunicação.

Perceberá também o significado de códigos, como o que indica a porcentagem, os números com vírgula abreviados (1,5 mil; 2,3 milhões etc.), os gráficos, as tabelas e a forma como são utilizadas as médias aritméticas em jornais, televisão, rádio, internet e também no dia a dia.

Esses conceitos serão explorados de modo intuitivo, para, em seguida, serem desenvolvidos com maior profundidade no decorrer do Ensino Fundamental.

O significado dos códigos — TEMA 1

Hoje em dia, vive-se na era da informação. O desenvolvimento da tecnologia em setores como informática, telefonia, internet, TV etc. transformou os meios de comunicação em sistemas sofisticados que possibilitam a qualquer pessoa o acesso à informação em tempo real, bastando, para isso, apertar uma simples tecla, seja ela do controle remoto da TV, do celular ou de um computador.

O que você vai descobrir nesta Unidade é o modo como a linguagem matemática e os sistemas de códigos são usados pelos meios de **comunicação direta** (naqueles apresentados em um órgão público, por exemplo) ou **indireta** (quando se liga o rádio, a TV ou se retira dinheiro no caixa eletrônico do banco).

O QUE VOCÊ JÁ SABE?



Ilustrações: © D'Livros Editorial

- Que tipos de aparelho permitem sua comunicação com o mundo?

• Você utiliza algum aparelho eletrônico no trabalho ou em seu dia a dia? Se sim, qual(is)?

Por trás de tanta tecnologia existe muita Matemática, que é utilizada por técnicos, engenheiros e especialistas em aparelhos eletrônicos e em comunicação eletrônica.

ATIVIDADE 1 A Matemática nos meios de comunicação

Como você fica sabendo das informações do dia a dia?

1 Pegue um jornal ou revista e faça uma lista de manchetes, artigos, seções que apresentem:



Ilustrações: © D'Livros Editorial

a) números;

b) tabelas;

c) gráficos;

d) quadros;

e) mapas;

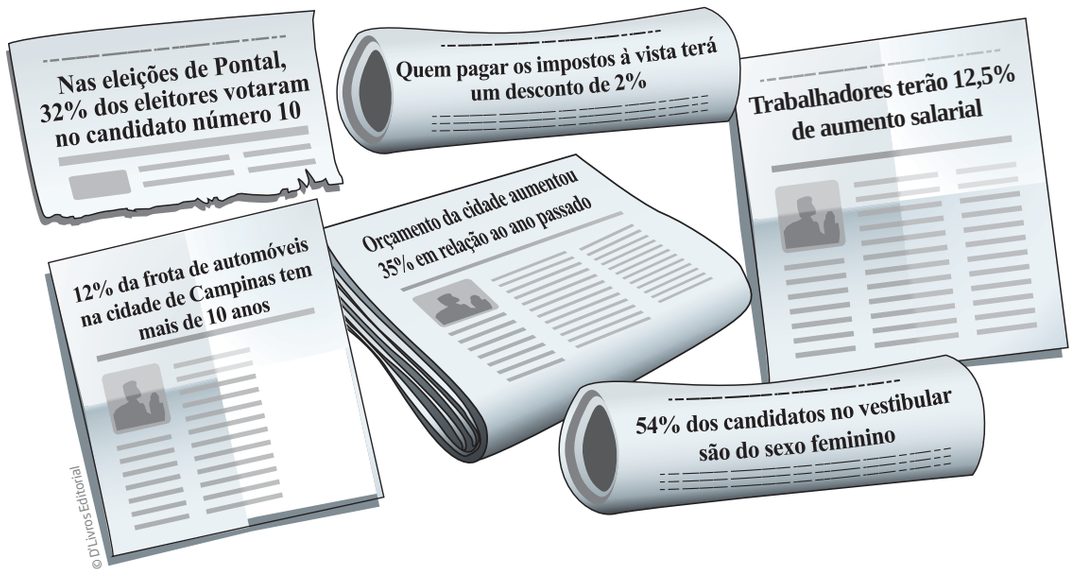
f) outras representações e ideias matemáticas.

2 Quais são as seções (ou cadernos) de um jornal em que mais aparecem situações matemáticas?

- Política.
- Serviços.
- Cidades.
- Cultura.
- Esportes.
- Classificados.
- Economia.
- Outras seções.

Noções de porcentagem

Os meios de comunicação atingem grande parte da população por meio de jornais, revistas, TV, internet e outros veículos. Para transmitir as informações de modo claro, preciso e resumido, faz-se uso da linguagem matemática, que passou a ser parte, com cada vez mais frequência, da vida das pessoas.



Como se pode ver pelas manchetes, para compreender as notícias é necessário saber Matemática, em especial a noção de porcentagem.

ATIVIDADE 2 Números nas notícias

Observe com atenção as manchetes dos jornais apresentadas na imagem acima e, em seguida, faça os exercícios com base nessas notícias.

1 Imagine que o município de Pontal tenha 1.000 eleitores. Quantos teriam votado no candidato número 10?

a) 32 eleitores.

b) 320 eleitores.

c) 32.000 eleitores.

2 Seu Celso tem de pagar um imposto no valor de R$ 100,00. Ele pagou o valor a vista. Qual foi o desconto que ele recebeu? Quanto ele pagou?

3 Jurandir ganha R$ 1.000,00 de salário. Qual será o seu salário depois do aumento?

a) R$ 125,00

b) R$ 1.125,00

c) R$ 1.250,00

4 Suponha que a cidade de Campinas tenha 100.000 automóveis. Indique quantos têm mais de 10 anos:

a) 1.200

b) 12.000

c) 120.000

5 Se o orçamento da cidade de Pontal era de 1 milhão de reais no ano passado, qual é o orçamento deste ano?

a) R$ 35.000.000,00

b) R$ 350.000,00

c) R$ 1.350.000,00

6 Neste ano, 10.000 estudantes prestaram o vestibular. Quantas eram as candidatas?

a) 54

b) 540

c) 5.400

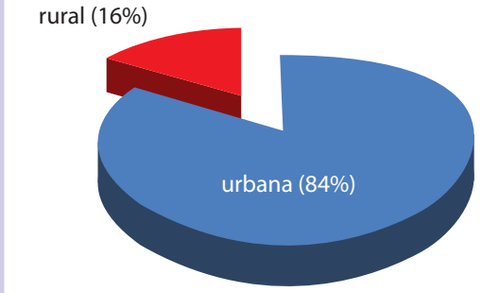
ORIENTAÇÃO DE ESTUDO

- Quando você for ler um gráfico, sempre comece pelo título, para saber o assunto de que ele trata.
- Atente para os valores extremos, ou seja, o maior e o menor valor, para que possa compreender os outros valores em relação a eles.

• Observe a legenda, que geralmente está ao lado do gráfico. Ela explicará as cores (ou algum outro recurso) utilizadas.

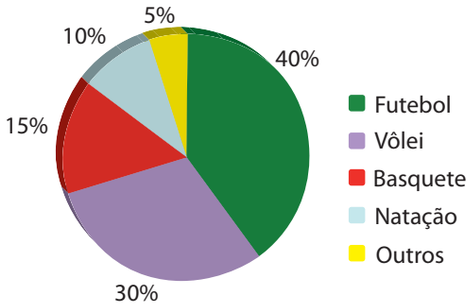
A circunferência apresentada é um **gráfico de setores** e representa o todo sendo dividido de acordo com os números relacionados à temática abordada. Esse tipo de gráfico é mais conhecido como "gráfico de pizza", porque seu formato assemelha-se a uma pizza fatiada.

População brasileira: rural x urbana



© D'Livros Editorial

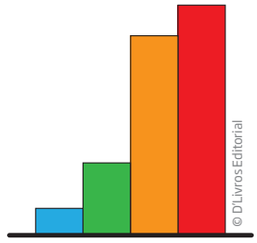
Preferência por modalidades esportivas



© D'Livros Editorial

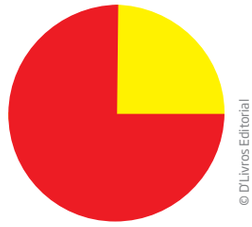
No gráfico 2, por exemplo, a cor verde indica que 40% dos entrevistados têm preferência pela modalidade esportiva futebol; a cor roxa representa que 30% preferem o vôlei e assim por diante.

Outro tipo de gráfico bem comum é o **gráfico de colunas**.



© D'Livros Editorial

Porcentagem



© D'Livros Editorial

Há várias ideias ligadas à noção de **porcentagem**. Uma delas é a de **fração**.

Por exemplo, a parte amarela do círculo ao lado corresponde à quarta parte do todo, e a parte vermelha, a $\frac{3}{4}$ do todo.

Imagine que esse círculo é um queijo, e ele está dividido em quatro partes iguais. Se você pegou uma das 4 partes, significa que você ficou com $\frac{1}{4}$ do queijo, e no prato ficaram $\frac{3}{4}$ dele, ou seja, 3 partes de um todo que continha 4 partes.

Supondo que o todo vale 100, a parte amarela corresponde à quarta parte de 100, ou seja, vale 25.

VOCÊ SABIA?

A palavra porcentagem tem origem na língua latina e significa *per centum*, ou seja, por cento, por cada centena. É o estabelecimento de uma comparação com o 100, na forma de fração.

Outro modo de expressar a parte amarela é dizer que ela representa 25% do todo.

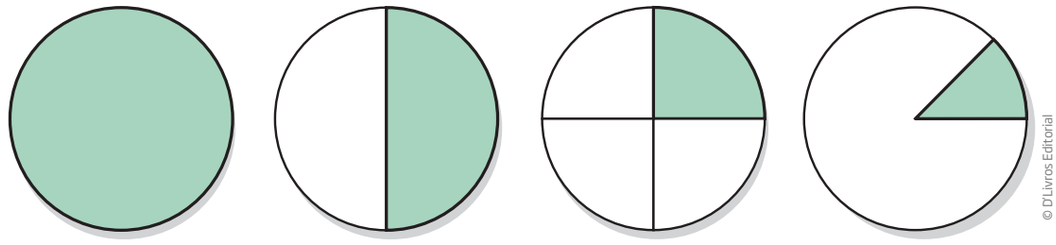
25%: lê-se “25 por cento”.

Veja a correspondência entre algumas frações e porcentagens.

$$\frac{1}{2} = 50\% \qquad \frac{1}{4} = 25\% \qquad \frac{3}{4} = 75\%$$

Algumas porcentagens são fáceis de calcular, em especial 10% e 50%, pois representam a décima parte e a metade do todo.

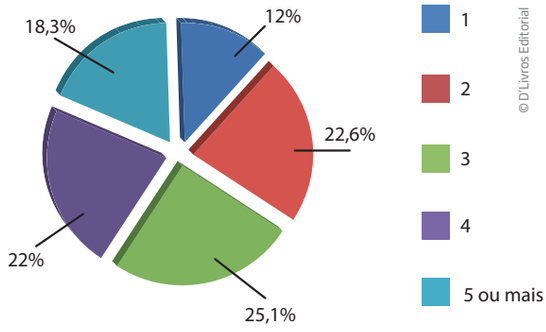
É muito comum que os meios de comunicação utilizem gráficos para que as porcentagens possam ser visualizadas.



100% 50% 25% 12,5%

Em algumas situações, os gráficos são utilizados associados a tabelas, para que se possa fazer uma leitura mais direta do que se pretende informar. No gráfico de setores, por exemplo, o ângulo de abertura de cada setor (fatia) é proporcional às porcentagens indicadas na tabela.

Pessoas por domicílio	
Número de pessoas	**% de domicílios**
1	12,0
2	22,6
3	25,1
4	22,0
5 ou mais	18,3



Desse modo, associando as informações dessa tabela às do gráfico, é possível perceber que, em mais da metade dos domicílios, vivem até 3 pessoas.

Veja agora mais um gráfico associado a uma tabela. Diferente do gráfico anterior, ele representa apenas alguns dados da tabela.

Jovens de 15 a 24 anos de idade segundo a condição de atividade – 2003

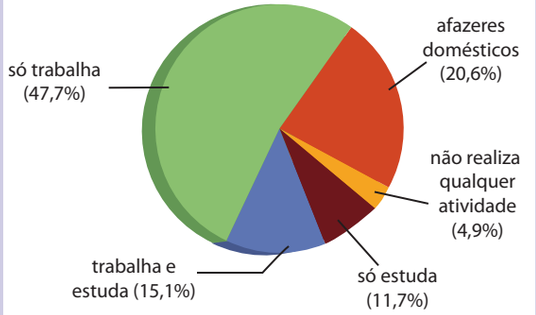
Condição de atividade	15 e 17 anos (%)	18 e 19 anos (%)	20 a 24 anos (%)
Só estuda	60,9	30,4	11,7
Trabalha e estuda	21,4	21,3	15,1
Só trabalha	7,7	26,9	47,7
Afazeres domésticos	7,0	16,3	20,6
Não realiza qualquer atividade	2,9	5,1	4,9

Fonte: IBGE. Síntese de Indicadores Sociais, 2004. Disponível em: <http://teen.ibge.gov.br/es/noticias-teen/2856-jovens-estudo-e-trabalho>. Acesso em: 15 abr. 2014.

O **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística**, mais conhecido pela sigla **IBGE**, é a instituição brasileira responsável pela realização dos censos demográficos (que fazem a contagem da população brasileira) e outras pesquisas e levantamentos estatísticos sociais, geográficos e econômicos de interesse de governos, das ciências, da indústria, do comércio e dos cidadãos em geral.

Um estudo do IBGE, realizado entre 1993 e 2003, mostra que aumentou de 40,7% para 60,9% o número de adolescentes entre 15 e 17 anos de idade que tinham o estudo como atividade exclusiva. Porém, nas faixas etárias seguintes, a possibilidade de somente estudar ainda é uma realidade para poucos. Assim, em 2003, 30,4% dos jovens de 18 e 19 anos de idade e 11,7% dos que tinham entre 20 e 24 anos dedicavam-se unicamente aos estudos.

Atividades dos jovens brasileiros de 20 a 24 anos



Fonte: IBGE. Síntese de Indicadores Sociais, 2004. Disponível em: <http://teen.ibge.gov.br/es/noticias-teen/2856-jovens-estudo-e-trabalho>. Acesso em: 15 abr. 2014.

© D'Livros Editorial

Com isso, mais da metade dos jovens entre 15 e 24 anos ocupavam um posto no mercado de trabalho em 2003.

Procure reescrever com suas palavras o texto que acabou de ler, indicando sua compreensão sobre os percentuais, conforme o exemplo a seguir:

Se, em 1993, 40,7% dos adolescentes só estudavam, então se pode dizer que pouco mais que 40 em cada 100 alunos, com idade entre 15 e 17 anos, apenas estudavam.

EMPREGO FORMAL

O empregado formal é aquele que possui registro em sua carteira profissional: a **Carteira de Trabalho e Previdência Social** (CTPS), expedida pelo Ministério do Trabalho e Emprego, que é o documento obrigatório para que os cidadãos possam ser empregados registrados. O emprego formal é conhecido popularmente como "trabalho com carteira assinada".

Na CTPS, a empresa deve sempre anotar, nas páginas próprias para o Contrato de Trabalho, o nome da empresa, o número do CNPJ (que é o Cadastro Nacional da Pessoa Jurídica, do Ministério da Fazenda), o endereço da empresa, a espécie de estabelecimento (comércio, indústria etc.), o cargo para o qual o trabalhador está sendo contratado, o código da sua ocupação na Classificação Brasileira de Ocupações (CBO), a data de admissão, o número do registro, assim como o número da folha ou ficha do Livro de Registro de Empregados, e ainda a remuneração do trabalhador.

A remuneração especificada na CTPS é o que se chama **salário bruto**, ou seja, é o total do salário pago pelo empregador antes dos descontos referentes ao Instituto Nacional do Seguro Social (INSS) – responsável pelo pagamento da aposentadoria, do auxílio-doença etc. – e ao Imposto de Renda (IR), entre outros, como o seguro-saúde. Algumas empresas pagam parte do custo mensal desse seguro, ficando a outra parte por conta do funcionário.

Veja as tabelas dos principais descontos no salário:

Tabela 1 – Descontos do IR sobre o salário bruto

Base de cálculo (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IR (R$)
Até 1.787,77	–	–
De 1.787,78 até 2.679,29	7,5	134,08
De 2.679,30 até 3.572,43	15,0	335,03
De 3.572,44 até 4.463,81	22,5	602,96
Acima de 4.463,81	27,5	826,15

Fonte: Receita Federal. Tabela Progressiva para cálculo mensal do Imposto sobre a Renda da Pessoa Física a partir do exercício de 2015, ano-calendário de 2014. Lei nº 12.469, de 26 de agosto de 2011. Disponível em: <http://www.receita.fazenda.gov.br/aliquotas/TabProgressiva2012a2015.htm>. Acesso em: 13 mar. 2014.

Tabela 2 – Contribuição ao INSS (desde 1º/1/2014)

Salário	Desconto (%)
Até R$ 1.317,07	8
De R$ 1.317,08 até R$ 2.195,12	9
De R$ 2.195,13 até R$ 4.390,24	11

Fonte: Ministério da Previdência Social. Inicial - Central de serviços ao segurado: formas de contribuição: empregado. Disponível em: <http://www.previdencia.gov.br/inicial-central-de-servicos-ao-segurado-formas-de-contribuicao-empregado/>. Acesso em: 13 mar. 2014.

Remuneração mensal: salário fixo, salário variável, descanso semanal remunerado, adicional noturno e outros, se aplicáveis.

Contribuição ao INSS: porcentagem sobre a remuneração mensal, com teto máximo de R$ 482,93.

Dependente legal: pode ser o marido ou a mulher, filho, filha ou enteados com até 21 anos (ou até 24 anos se forem universitários ou estiverem cursando Ensino Médio Técnico), todos não declarantes de IR.

Exemplo: um empregado que ganha R$ 2.500,00 e tem um filho como dependente legal pagará 7,5% de IR e 11% de INSS. O fato de se ter um dependente legal permite que seja deduzido do IR retido na fonte o valor de R$ 179,71, mas, para isso, é necessário calcular um valor chamado de salário-base de cálculo, que é feito da seguinte maneira.

Salário bruto menos o desconto de 11% de INSS e menos o valor dedutível por dependente legal.

Em números, isso representa: R$ 2.500,00 – R$ 275,00 – R$ 179,71 = R$ 2.045,29 (base de cálculo).

Sobre esse valor é que será calculado os 7,5% (alíquota de IR) de desconto para o imposto retido na fonte. Assim, deve-se multiplicar a base de cálculo por 7,5 e dividir por 100 (7,5 × 2.045,29 ÷ 100 = 153,39).

Sobre esse resultado é preciso ainda subtrair R$ 134,08, que corresponde à dedução estabelecida para salários entre R$ 1.787,78 e R$ 2.679,29, de acordo com as condições de cálculo do IR (153,39 – 134,08 = 19,31).

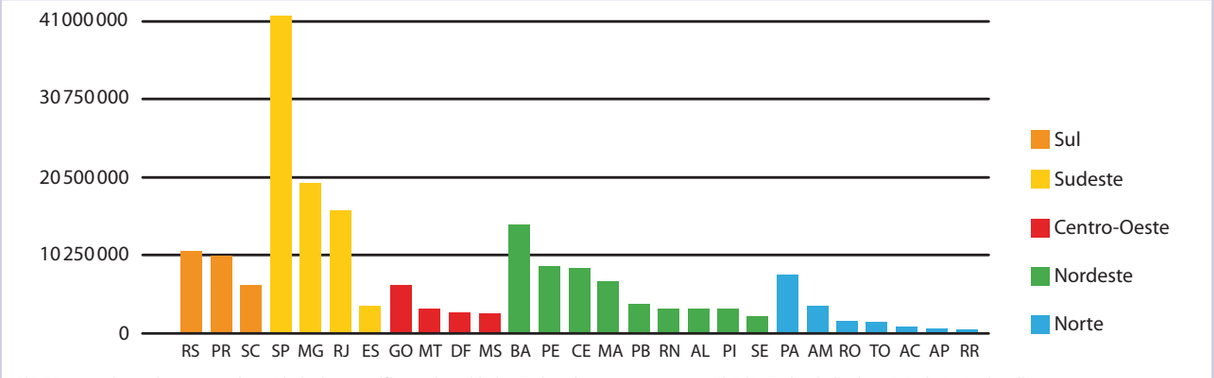
O valor de R$ 19,31 será descontado mensalmente como imposto de renda retido na fonte.

O conjunto das informações anteriormente citadas (nome da empresa, número do CNPJ, endereço da empresa, a espécie de estabelecimento etc.) precisa constar **obrigatoriamente** na CTPS, pois essas informações compõem o registro do emprego para o qual o trabalhador está sendo contratado e, principalmente, porque só assim seus direitos serão assegurados.

ATIVIDADE 3 Leitura e interpretação de gráficos

1 Observe o gráfico a seguir sobre a concentração da população brasileira, segundo o Censo 2010, e responda às questões a seguir.

Ranking de Estados[*] por Região



© D'Livros Editorial

[*] O termo adequado a ser usado no título desse gráfico seria Unidades Federativas, uma vez que o Distrito Federal não é um Estado [nota do editor].

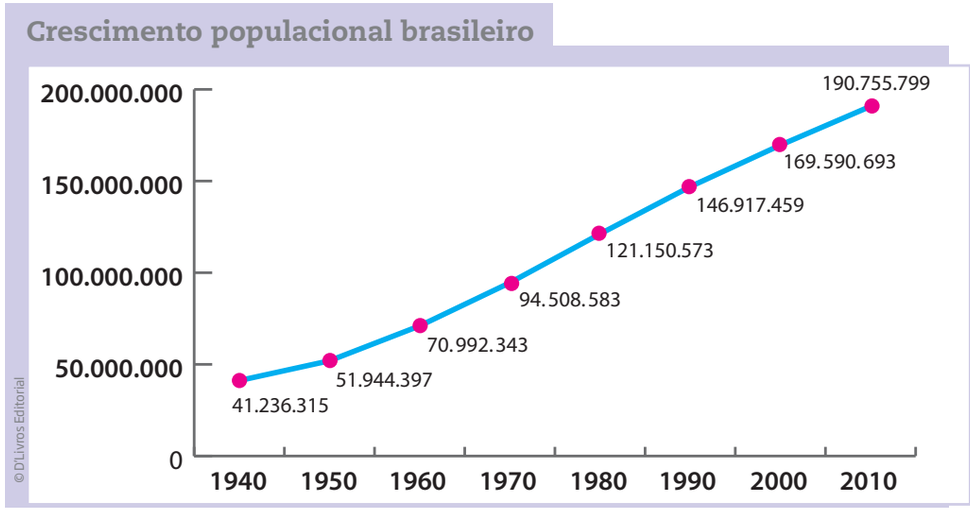
Fonte: Censo 2010: quantos somos e quanto crescemos. *O Estado de S. Paulo*, Infográficos, 29 nov. 2010, 15h31. Disponível em: <http://www.estadao.com.br/especiais/censo-2010-quantossomos-e-quanto-crescemos,126097.htm>. Acesso em: 15 abr. 2014.

a) Quantos Estados têm mais de 10 milhões de habitantes?

b) Qual é o Estado mais populoso da região Nordeste?

c) Qual é o Estado menos populoso da região Sul?

2 Observe o gráfico de crescimento da população brasileira e depois responda às questões propostas:



Fonte: IBGE. Disponível em: <http://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?vcodigo=CD90&sv=32&t=populacao-presente-e-residente>. Acesso em: 13 mar. 2014.

a) Qual é o número de habitantes da população brasileira segundo o Censo de 2010?

b) Em que década a população brasileira superou a marca de 120 milhões de habitantes?

c) Quantos milhões de habitantes a população brasileira cresceu de 1940 a 1980?

DESAFIO

O gráfico ao lado apresenta o resultado de uma pesquisa feita em um município sobre o número de crianças que não vão à escola.

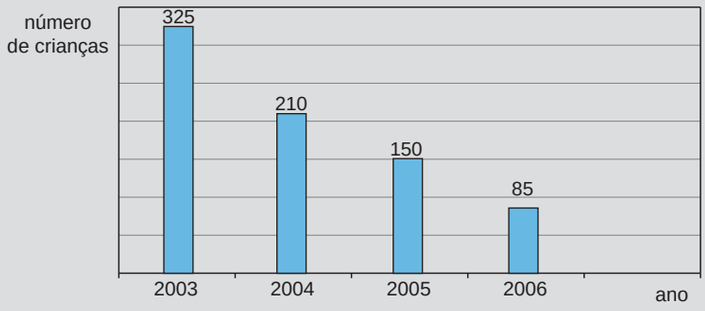
Nesse município, quantas crianças não foram à escola em 2004?

a) 325

b) 210

c) 150

d) 85



Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/6ª%20série%20EF/1_Manhã/Prova-MAT-6EF-Manha.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - A Matemática nos meios de comunicação

O objetivo dessa atividade é proporcionar a você um espaço de investigação sobre como e quanto a Matemática está presente em um jornal. Você verá que, em dada edição, uma seção pode ter mais situações matemáticas que outra e, em outro dia, isso pode se inverter, mas normalmente tem-se, nas seções de Política, Cidades e Economia, a maior concentração de uso de elementos matemáticos.

Atividade 2 - Números nas notícias

1 Alternativa correta: **b**. Como 32% ou $\frac{32}{100}$ dos eleitores votaram no candidato de número 10, tem-se $1.000 \times 32 = 32.000 \Rightarrow 32.000 \div 100 = 320$, ou, fazendo primeiro a divisão por 100 e depois multiplicando por 32, tem-se $1.000 \div 100 = 10 \Rightarrow 10 \times 32 = 320$. O cálculo também pode ser feito da seguinte maneira $1.000 \times 0{,}32 = 320$, considerando que $\frac{32}{100} = 0{,}32$.

2 Com 2% ou $\frac{2}{100}$ de desconto pelo pagamento a vista e sendo a dívida de seu Celso de R$ 100,00, nem é preciso fazer cálculos, uma vez que o desconto corresponde a 2 em cada 100. Assim, o desconto foi de R$ 2,00 e seu Celso pagou R$ 98,00 no imposto.

3 Alternativa correta: **b**. Considere que, ao ter um aumento salarial, o trabalhador passará a receber o salário antigo mais o aumento, podendo o cálculo ser feito assim $1.000 + 1.000 \times \frac{12{,}5}{100}$.

Para obter o resultado dessa multiplicação, pode-se, primeiro, dividir 1.000 por 100, obtendo 10, e, depois, multiplicar por 12,5, como indicado a seguir:

$1.000 \times \frac{12,5}{100} = (1.000 \div 100) \times 12,5 = 10 \times 12,5 = 125$.

Portanto, o salário passará a ser de 1.000 + 125 = 1.125.

Depois do aumento, o salário de Jurandir será de R$ 1.125,00.

4 Alternativa correta: **b**. Pensando do mesmo modo, para calcular 12% de 100.000, faz-se $100.000 \times \frac{12}{100} = 100.000 \div 100 \times 12 = 1.000 \times 12 = 12.000$. Em Campinas, há 12.000 automóveis com mais de 10 anos.

5 Alternativa correta: **c**. Do mesmo modo que no problema do cálculo do aumento do trabalhador, aqui também se trata de calcular um aumento, então o novo orçamento será igual ao anterior mais o aumento: $1.000.000 + 1.000.000 \times \frac{35}{100}$.

Calculando o aumento, tem-se $1.000.000 \div 100 \times 35 = 10.000 \times 35 = 350.000$.

Acrescentando o aumento ao orçamento anterior, obtém-se 1.000.000 + 350.000 = 1.350.000.

Assim, o orçamento deste ano é de R$ 1.350.000,00.

6 Alternativa correta: **c**. Neste problema, basta calcular 54% de 10.000.

$10.000 \times \frac{54}{100} = 10.000 \div 100 \times 54 = 5.400$.

Dos 10.000 estudantes que prestaram vestibular, 5.400 eram do sexo feminino.

Atividade 3 - Leitura e interpretação de gráficos

1

a) Seis Estados têm mais de 10 milhões de habitantes: Bahia (BA), Minas Gerais (MG), Paraná (PR), Rio de Janeiro (RJ), Rio Grande do Sul (RS) e São Paulo (SP).

b) Bahia.

c) Santa Catarina.

2

a) 190.755.799 habitantes.

b) Na década de 1980.

c) 121.150.573 (em 1980) – 41.236.315 (em 1940) = 79.914.258 habitantes, aproximadamente 80 milhões de habitantes.

Desafio

Alternativa correta: **b**. O número de crianças que não foram à escola é igual a 210.

HORA DA CHECAGEM



Registro de dúvidas e comentários

Média é um conceito importante da Estatística (ramo da Matemática), muito utilizado nos meios de comunicação, além de estar presente na Língua Portuguesa com um sentido próximo do conceito matemático formal. Tal como feito no Tema anterior com as porcentagens, o objetivo inicial é aproximar o conhecimento que você já tem do termo com seu sentido matemático.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

É muito comum se ouvir falar em média: peso médio de algo, idade média de uma turma de jovens, salário médio de determinada categoria e assim por diante.

Mesmo que não tenha associado esse conceito à Matemática, provavelmente você já deve ter se confrontado com alguma situação em que foi preciso saber calcular a média, porque ela faz parte do cotidiano.

Salário médio

Leia a notícia ao lado. O que você acha que ela está comunicando?

- Todos os trabalhadores ganham R$ 1.966,90 por mês.
- Não existem trabalhadores que ganham mais do que R$ 1.966,90 por mês.
- Nenhum trabalhador ganha abaixo de R$ 1.966,90 por mês.
- A maioria dos trabalhadores ganha exatamente R$ 1.499,00 por mês.
- Poucos trabalhadores ganham R$ 1.966,90 por mês.

Segundo o IBGE, o rendimento médio do trabalhador, no mês de dezembro de 2013, foi de R$ 1.966,90.

Em comparação ao mesmo mês do ano anterior (2012), o trabalhador teve um aumento no poder de compra de 3,2%.

O poder de compra do brasileiro, entre 2003 e 2013, aumentou em 29,6% (em 2003, era de R$ 1.448,48).

Fontes: IBGE. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/mtexto/pmecrendi.htm>. DESEMPREGO cai a 5,4% em 2013 e é o menor da história, diz IBGE. *BLOG do Planalto*, 30 jan. 2014, 11h35. Disponível em: <http://blog.planalto.gov.br/desemprego-cai-a-54-em-2013-e-e-o-menor-da-historia-diz-ibge/>. Acessos em: 13 fev. 2014.

Antes de se preocupar em saber se encontrou a resposta correta, analise a informação obtida do site Salariômetro (disponível em: <http://www.salariometro.sp.gov.br>, acesso em: 13 fev. 2014), que divulga em tempo real o salário médio dos trabalhadores por setor:

O salário médio pago para os marceneiros nos últimos seis meses foi de R$ 1.038,00.

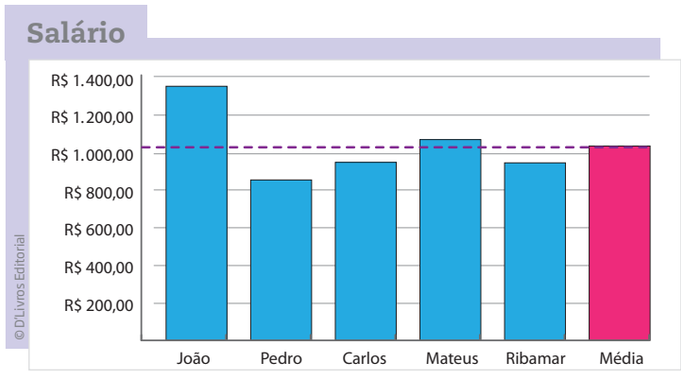
O que significa essa informação?

Para entender o conceito de média aritmética, que, em geral, é utilizada nesse tipo de informação, serão analisados os salários dos funcionários de uma marcenaria fictícia, cujos profissionais têm a mesma média salarial apresentada no site.

Observe que, pela planilha de salários, nenhum funcionário recebe exatamente R$ 1.038,00.

Para entender melhor a situação, os salários serão representados por meio de um gráfico de colunas:

Funcionário	Salário (em R$)
João	1.360,00
Pedro	830,00
Carlos	960,00
Mateus	1.080,00
Ribamar	960,00



ATIVIDADE 1 Cálculo do salário médio

1 Calcule a soma de todos os salários que aparecem no gráfico de colunas apresentado anteriormente. Divida o montante da massa salarial (a soma de todos os salários) pelo número de funcionários.

2 O que você descobriu?

Você deve ter descoberto que, somando todos os salários e dividindo o total pelo número de trabalhadores, o resultado é o que se chama **salário médio**.

$$\text{Salário Médio} = \frac{\text{soma do total de salários}}{\text{número de trabalhadores}}$$

$$SM = \frac{1.360 + 830 + 960 + 1.080 + 960}{5} = \frac{5.190}{5} = 1.038$$

Para compreender melhor o conceito de média aritmética, imagine a seguinte **situação hipotética**:

Situação hipotética

É uma situação baseada em hipóteses, em possibilidades. Ou seja, é uma situação que tem probabilidade de acontecer.

	João	Pedro	Carlos	Mateus	Ribamar
Início	1.360,00	830,00	960,00	1.080,00	960,00
João empresta R$ 208,00 para Pedro	1.360 – 208 = 1.152	830 + 208 = 1.038			
João empresta R$ 78,00 para Carlos	1.152 – 78 = 1.074		960 + 78 = 1.038		
Mateus empresta R$ 42,00 para Ribamar				1.080 – 42 = 1.038	960 + 42 = 1.002
João empresta R$ 36,00 para Ribamar	1.074 – 36 = 1.038				1.002 + 36 = 1.038

Observe que, redistribuindo os salários, todos os trabalhadores ficam com a mesma quantia. Esse é um dos sentidos da ideia de média: o de equilíbrio e distribuição equitativa.

ATIVIDADE 2 A média aritmética no dia a dia de um taxista

1 Seu Belina é motorista de táxi. Por ser muito organizado, ele registra os dados que considera importantes para poder planejar seus gastos e o rendimento de seu trabalho.

No primeiro dia de trabalho na nova empresa, ele anotou, por exemplo, o valor (em R$) de cada corrida.

Registro dos valores de um dia de trabalho:

Corrida	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª
Valor (em R$)	12	10	15	20	8	22	16	24	12	17	14	10

a) Calcule o total arrecadado no primeiro dia de trabalho.

b) Em média, quantos reais cada corrida rendeu a seu Belina?

2 Veja outros dados de seu Belina em sua planilha semanal:

	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado	Total semanal
Horas trabalhadas	11	12	10	11	14	8	
Corridas atendidas	12	13	9	13	17	8	
Combustível consumido (em ℓ)	50	57	46	52	54	44	
Arrecadação (em R$)	180	150	120	160	180	92	

Considerando apenas os seis dias em que ele trabalhou, preencha a coluna *Total semanal* da tabela anterior. Depois, calcule:

a) Quantas horas, em média, ele trabalhou por dia?

b) Quantas corridas ele atendeu, em média, diariamente?

c) Qual foi o consumo médio de combustível por dia de trabalho?

d) Qual foi a arrecadação média diária?

ATIVIDADE 3 O dia a dia e a média

Analise outras situações do dia a dia em que o conceito de média aparece.

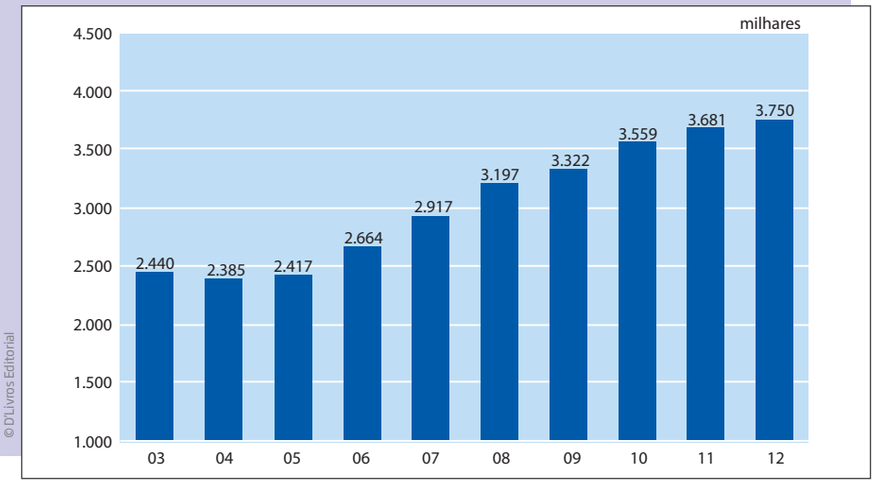
1 Levando em consideração as informações ao lado, calcule a média das temperaturas máxima e mínima na cidade de São Paulo durante seis dias consecutivos.



© D'Livros Editorial

2 De acordo com a Companhia do Metropolitano de São Paulo (Metrô), a média de passageiros transportados por dia útil em todo o sistema, no ano de 2012, foi de 3,75 milhões de pessoas.

Evolução dos passageiros transportados na rede
Média dos dias úteis



© D'Livros Editorial

Fonte: Companhia do Metropolitano de São Paulo (Metrô). Relatório da Administração, 2012. Disponível em: <http://www.metro.sp.gov.br/metro/institucional/pdf/rel-administracao.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2014.

Analise as seguintes afirmações.

a) Isso quer dizer que foram transportadas exatamente 3,75 milhões de pessoas em um dia útil?

b) É possível que, em algum dia da semana, tenham sido transportados mais ou menos do que 3,75 milhões de passageiros?

ORIENTAÇÃO DE ESTUDO

Ao elaborar a resposta para um exercício, procure fazê-la da maneira mais completa possível.

Por exemplo, se a pergunta for: "Qual é a capital do Brasil?", em vez de responder "Brasília", que é uma forma incompleta, pois a palavra fica solta e isolada, dificultando a compreensão do leitor, procure produzir uma frase ou um pequeno texto, por exemplo: "A capital do Brasil é Brasília" ou "Brasília é a capital do Brasil".

Essa sim é uma resposta completa, que se preocupa com a compreensão do leitor, pois possui sentido, mesmo sem que se leia a pergunta.

Ao término da escrita, não esqueça: faça uma revisão dos aspectos gramaticais, da ortografia e da acentuação, buscando garantir que as frases estejam bem organizadas.

ATIVIDADE 4 Interpretando uma notícia de jornal

Uma pesquisa realizada pelo Banco Central (órgão do governo federal) sobre o modo como o brasileiro utiliza o dinheiro apresentou alguns dados acerca de seus hábitos.

Leia atentamente o resumo da pesquisa *O Brasileiro e sua relação com o dinheiro*, que segue ao lado.

Depois, responda às questões propostas.

> Brasília – A pesquisa "O Brasileiro e sua Relação com o Dinheiro", versão 2010, aponta que a forma de pagamento mais usada pela população ainda é o dinheiro, correspondendo a 72% comparativamente às outras formas de pagamento. Além disso, a maioria da população brasileira continua recebendo seu salário em dinheiro (55%). Verificou-se também um crescimento significativo do número de brasileiros que possuem conta-corrente, passando de 39% em 2007, para 51% em 2010, bem como houve um considerável crescimento da participação do cartão, tanto de crédito quanto de débito, no pagamento de contas e compras, principalmente nas compras de super/hipermercados, eletrodomésticos, roupas e calçados. O valor médio das despesas mensais do público elevou-se cerca de 40% entre 2007 e 2010, ficando em torno de R$ 808 sendo que 59% [...] [foram] pagas em dinheiro.
>
> Fonte: Banco Central do Brasil. *BC divulga pesquisa "O Brasileiro e sua Relação com o Dinheiro"*. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/textonoticia.asp?codigo=2986&idpai=NOTICIAS>. Acesso em: 15 abr. 2014.

1 Como você paga a maioria de suas contas?

a) Com dinheiro.

b) Com cheque.

c) Com cartão de crédito.

d) Com débito em conta-corrente.

e) Outras formas. Quais?

2 De acordo com a notícia, é possível afirmar que a maioria dos brasileiros paga suas contas usando dinheiro ou outras formas, como cheques ou cartões?

3 É possível dizer que mais da metade dos trabalhadores recebe seu salário em dinheiro? Que parte da notícia sustenta sua resposta?

4 Aproximadamente que fração da população brasileira recebe seu salário em dinheiro?

5 Quais dentre as frases a seguir estão corretas? Explique sua resposta com base na notícia que você leu.

a) Em 2007, mais da metade dos brasileiros tinha conta-corrente.

b) Em 2007, menos da metade dos brasileiros tinha conta-corrente.

c) Em 2010, mais da metade dos brasileiros tinha conta-corrente.

d) Em 2010, menos da metade dos brasileiros tinha conta-corrente.

e) Em 2010, aproximadamente metade dos brasileiros tinha conta-corrente.

6 De 2007 a 2010 houve aumento ou diminuição de brasileiros com conta-corrente? Qual foi o porcentual de aumento ou diminuição?

7 Um trabalhador ganha R$ 2.400,00 de salário. Aproximadamente 10% do que recebe é consumido em impostos; 25% de seu salário é gasto com moradia; e 30%, com alimentação. Para saber quanto ele gasta com impostos, moradia e alimentação, calcule:

a) 10% de R$ 2.400,00;

b) 20% de R$ 2.400,00;

c) 30% de R$ 2.400,00;

d) 50% de R$ 2.400,00;

e) 25% de R$ 2.400,00;

f) 75% de R$ 2.400,00.

8 Um trabalhador que ganha R$ 2.400,00 de salário gastou R$ 800,00 em compras. Que porcentagem de seu salário ele gastou com as compras?

a) 15%.

b) Um pouco menos que 25%.

c) Um pouco mais que 30%.

d) 50%.

ATIVIDADE 5 Comunicação matemática no dia a dia

As ideias matemáticas, seus métodos e sua linguagem estão presentes nas mais variadas situações do dia a dia de uma pessoa.

Para se localizar e se orientar em uma cidade, podem-se usar mapas que empregam códigos matemáticos.

1 Consulte o mapa a seguir e dê as coordenadas:

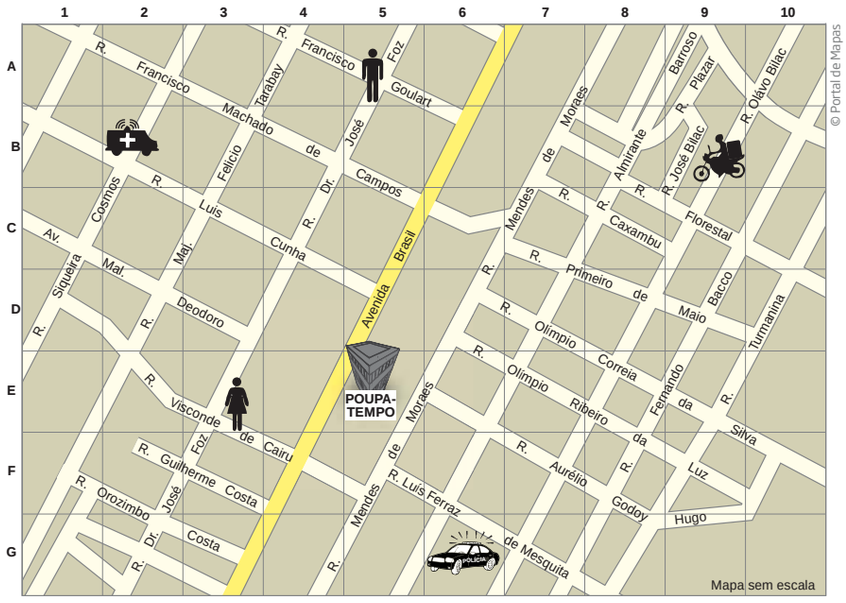
a) do Poupatempo: _____

b) do *motoboy*: _____

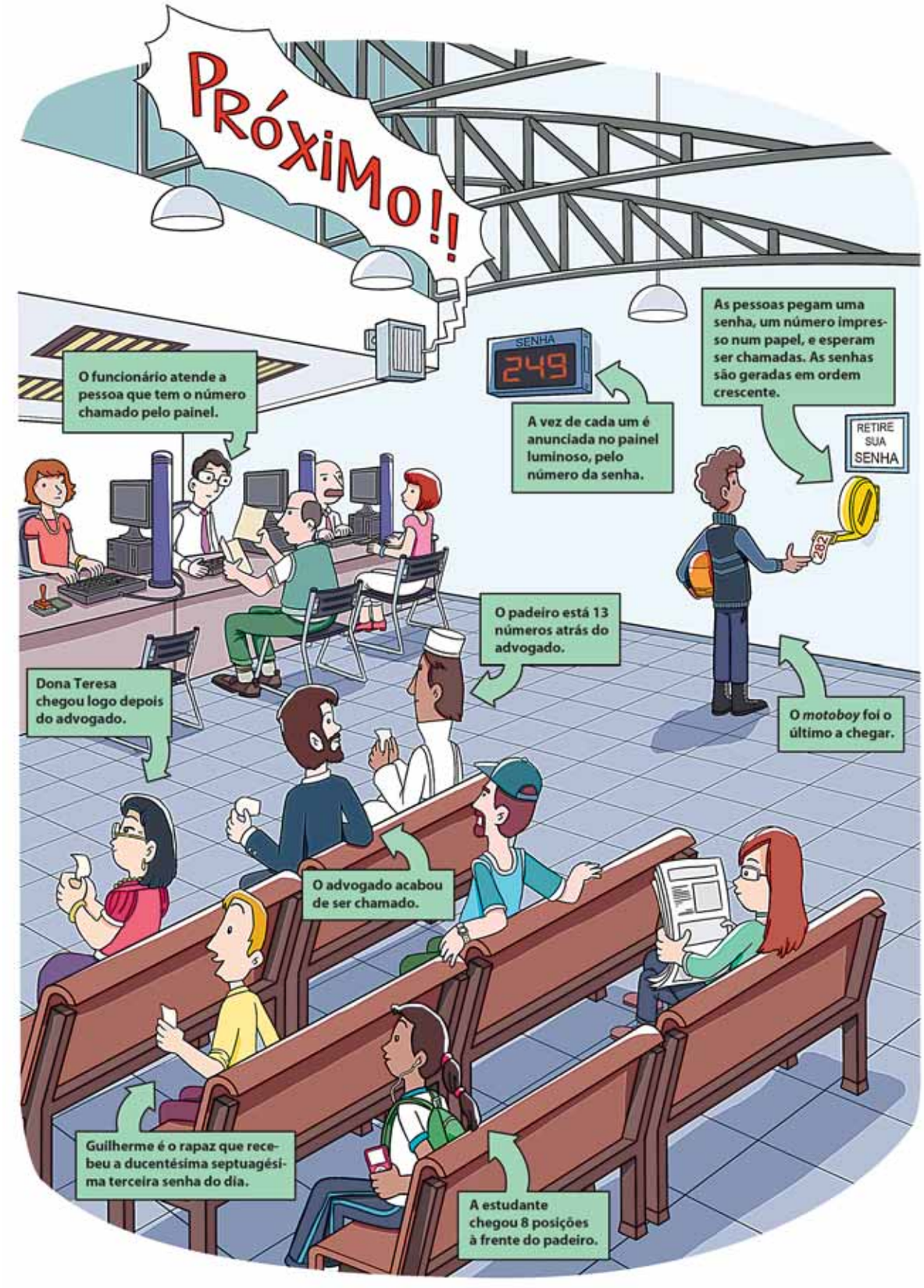
c) da ambulância: _____

d) da viatura de polícia: _____

e) Quem está na coordenada E3: um homem ou uma mulher? _____



2 Seu Alberto foi ao Poupatempo tirar a segunda via de sua Carteira de Trabalho e observou as seguintes situações:



© Leandro Robles/Pingado

Agora, resolva os exercícios a seguir.

a) Descubra os números de senha:

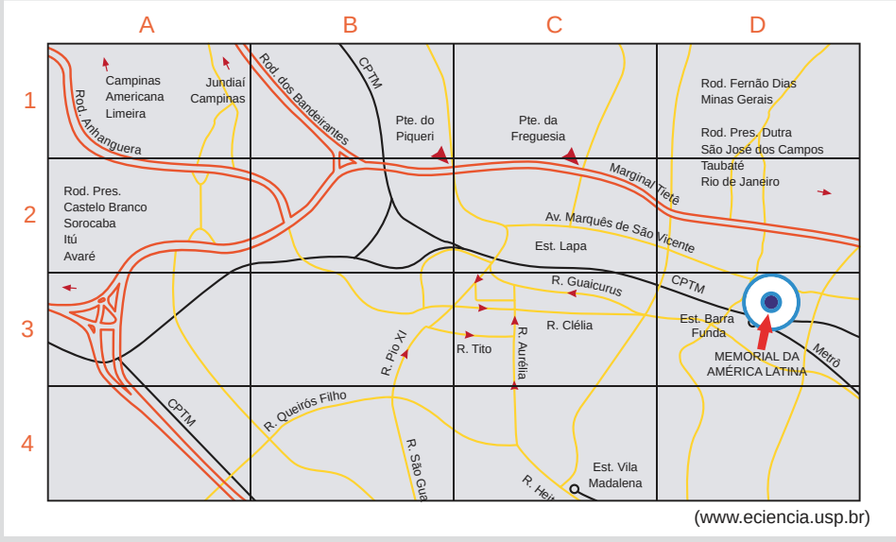
- do advogado: _____
- de Dona Teresa: _____
- de Guilherme: _____
- do *motoboy*: _____
- do padeiro: _____
- da estudante: _____

b) Quantos números o *motoboy* vai ter de esperar até ser chamado?

_____

DESAFIO

1 O mapa abaixo apresenta um quadriculado cujas colunas são indicadas pelas letras A, B, C, D e as linhas, pelos números 1, 2, 3, 4.



(www.eciencia.usp.br)

O círculo indica a localização do Memorial da América Latina, em São Paulo, que está no retângulo indicado pela

a) letra C e o número 1.
b) letra D e o número 2.
c) letra B e o número 3.
d) letra D e o número 3.

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/6ª%20série%20EF/2_Tarde/Prova-MAT-6EF-Tarde.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2014.

2 Em 5 partidas de voleibol, Duda fez 12, 15, 11, 18 e 14 pontos. Qual foi a média de pontos nessas partidas?

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14

Saresp 2007. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2007/Arquivos/Provas%202007/Matemática/6ª%20série%20EF/2_Tarde/Prova-MAT-6EF-Tarde.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2014.



Por que o salário do homem é diferente do salário da mulher, se ambos podem exercer as mesmas funções?

Homens ganham mais

Conforme o IBGE, o rendimento médio das mulheres é mais baixo que o dos homens, mesmo com mais escolaridade que eles. Em 2009, as mulheres ocupadas recebiam cerca de 70,7% do rendimento médio dos homens ocupados. No mercado formal (trabalho registrado), a proporção era um pouco menos desigual: as mulheres recebem quase 75% do que os homens. No mercado informal, a diferença é bem maior: as mulheres recebem 63,2% do rendimento médio dos homens.

Fonte: IBGE. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/condicaodevida/indicadoresminimos/sinteseindicsociais2010/SIS_2010.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Cálculo do salário médio

1 1.360 + 830 + 960 + 1.080 + 960 = 5.190 → 5.190 ÷ 5 = 1.038. A média salarial é de R$ 1.038,00.

2 O valor encontrado é exatamente o salário médio que consta na informação do Salariômetro.

Atividade 2 - A média aritmética no dia a dia de um taxista

1

a) Somando as 12 corridas de um dia de trabalho, tem-se:

12 + 10 + 15 + 20 + 8 + 22 + 16 + 24 + 12 + 17 + 14 + 10 = 180. O total arrecadado foi de R$ 180,00.

b) 180 ÷ 12 = 15. Cada corrida rendeu R$ 15,00 em média.

HORA DA CHECAGEM

2 Planilha semanal

	Total semanal	Cálculo
a)	66	66 ÷ 6 = 11 horas diárias de trabalho, em média.
b)	72	72 ÷ 6 = 12 corridas, em média.
c)	303	303 ÷ 6 = 50,5 ℓ de consumo médio por dia.
d)	882	882 ÷ 6 = R$ 147,00 de arrecadação média.

Atividade 3 - O dia a dia e a média

1 A média da temperatura máxima é dada por 25 + 26 + 27 + 26 + 26 + 23 = 153 → 153 ÷ 6 = 25,5.

A média da temperatura mínima é dada por 15 + 16 + 15 + 16 + 16 + 15 = 93 → 93 ÷ 6 = 15,5.

Durante os seis dias consecutivos, a média da temperatura máxima foi de 25,5 °C, e a média da temperatura mínima foi de 15,5 °C.

2

a) A informação de que o sistema transporta em média 3,75 milhões de pessoas não garante que exatamente 3,75 milhões utilizem o metrô em determinado dia; isso pode ou não acontecer.

b) Sim, pode haver algum dia da semana em que o número de passageiros tenha sido superior ou inferior a 3,75 milhões.

Atividade 4 - Interpretando uma notícia de jornal

Como cada um dos exercícios dessa atividade busca uma informação diferente, então, mesmo que tenha lido atentamente o texto proposto, lembre-se de que ele é breve e vale a pena retomar a leitura para garantir a resposta mais adequada a cada um deles.

1 Essa questão não tem certo nem errado, pois depende apenas de seu hábito.

2 De acordo com a notícia, a maioria dos brasileiros paga suas contas usando dinheiro.

3 Sim. Isso é informado pelo trecho: “Além disso, a maioria da população brasileira continua recebendo seu salário em dinheiro (55%)”, que corresponde a mais da metade da população.

4 $\frac{55}{100}$. Um pouco mais da metade da população.

5

a) Errada – 39% não é mais da metade. “Verificou-se também um crescimento significativo do número de brasileiros que possuem conta-corrente, passando de 39% em 2007, para 51% em 2010”.

b) Correta – 39% é menos da metade.

c) Correta – 51% corresponde a mais da metade da população.

d) Errada – 51% corresponde a mais da metade da população.

e) Correta – 51% corresponde apenas a um pouco mais da metade, portanto pode-se afirmar que é aproximadamente metade da população.

6 Houve um aumento: passou de 39% para 51%. Em relação ao total de brasileiros, o aumento foi de 12%.

7 Nessa sequência de cálculos de porcentagem, é interessante você perceber que os cálculos para obter 10% e 50% são mais simples e que, a partir deles, pode-se obter qualquer um dos outros dessa lista.

a) Pense que $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, o que indica que para calcular 10% de um número é só dividir esse número por 10. Então, 2.400 ÷ 10 = 240. R$ 240,00.

b) Sabendo que 20 é igual a 2 × 10, tem-se que 20% de 2.400 será 2 × 240 = 480. R$ 480,00.

c) Conhecendo os valores de 10% e de 20%, para se obter 30% basta considerar que 10% + 20% = 30% ⇒ 240 + 480 = 720. R$ 720,00.

d) Como 50% corresponde à metade, seu cálculo se resume a uma divisão por 2, que é 2.400 ÷ 2 = 1.200, ou seja, R$ 1.200,00.

e) Como 25% é metade de 50%, seu cálculo se resume a dividir o valor de 50% ao meio ou dividir o total por 4. Então, 1.200 ÷ 2 = 600. R$ 600,00.

f) Sabendo que 75 = 25 + 50, fica simples perceber que, para calcular 75%, é preciso saber os valores de 25% e de 50% e, depois, somá-los. 600 + 1.200 = 1.800. R$ 1.800,00.

8 Alternativa correta: **c**. Um pouco mais que 30%, pois R$ 800,00 correspondem à terça parte de R$ 2.400,00, o que equivale a cerca de 33%.

Atividade 5 - Comunicação matemática no dia a dia

1

a) E5. **b)** B9. **c)** B2. **d)** G6. **e)** É uma mulher, o homem está na coordenada A5.

2

a)

Advogado	Guilherme	Padeiro
249	273	262
Dona Tereza	***Motoboy***	**Estudante**
250	282	254

b) Como o 249 é o número que consta no painel, o *motoboy* terá de esperar 32 números serem anunciados. O trigésimo terceiro será 282, que é a senha dele.

Desafio

1 Alternativa correta: **d**.

2 Alternativa correta: **d**. 12 + 15 + 11 + 18 + 14 = 70 → 70 ÷ 5 = 14. Duda fez uma média de 14 pontos.

HORA DA CHECAGEM

Neste tema, você estudará o que é o teorema de Pitágoras e como utilizá-lo na determinação de medidas em triângulos retângulos.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Pode-se notar a presença de triângulos em brinquedos de *playground*, em portões de madeira, nas estruturas de um telhado etc. Você acha que eles são sempre iguais? Sabe por que essa forma é tão utilizada? Nunca reparou nisso? Então, tente fazê-lo em um passeio ou no seu trajeto para casa um dia desses.

Teorema de Pitágoras – início de conversa

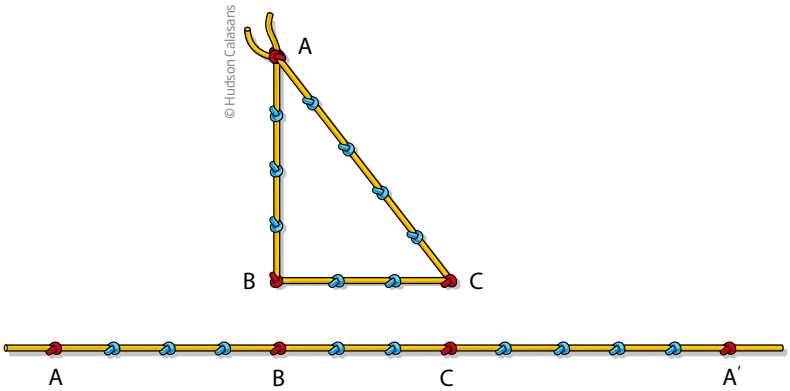
No Egito Antigo, os arquitetos que construíram as famosas pirâmides tinham de determinar, com certa precisão, os ângulos retos. Esses ângulos eram fundamentais em praticamente todas as construções, fosse para manter uma parede perpendicular ao solo, fosse para construir a base de uma pirâmide.



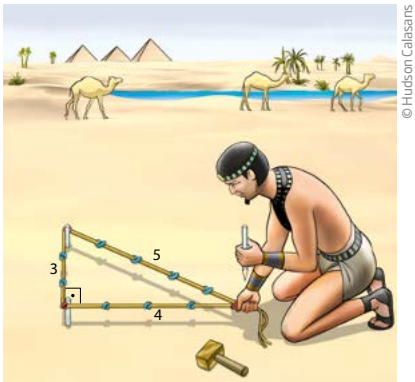
© Pius Lee/123RF

Pirâmides de Gizé, no Egito, construídas há mais de 4 mil anos: Quéfren, Quéops e Miquerinos.

Para obter o ângulo reto, eles usavam uma corda com 13 nós equidistantes, criando nela 12 intervalos de mesmo comprimento. Depois, juntavam o 1º nó ao 13º. Estacas marcavam o 5º e o 8º nós, determinando um triângulo, como indicado na figura.



© Hudson Calasans



© Hudson Calasans

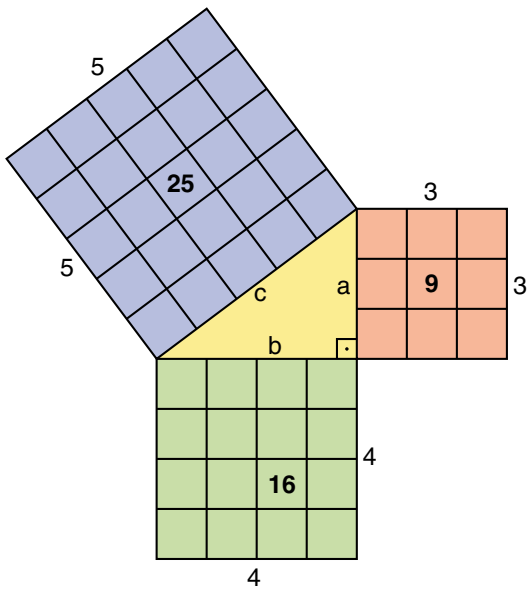
Por experiência, eles sabiam que um triângulo construído dessa forma (com lados medindo 3, 4 e 5 e com ângulo AB̂C reto), não importando a distância entre dois nós consecutivos, produzia triângulos semelhantes em que um dos ângulos media 90°.

Observe que, ao fazer essa construção, os lados do triângulo mediam 3, 4 e 5, satisfazendo uma relação curiosa entre as medidas:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Outra maneira de ver essa relação é construir quadrados sobre os lados do triângulo retângulo, como se pode ver na figura a seguir. Observe que há uma relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados.

© Peter Hermes Furian/Alamy/Glow Images

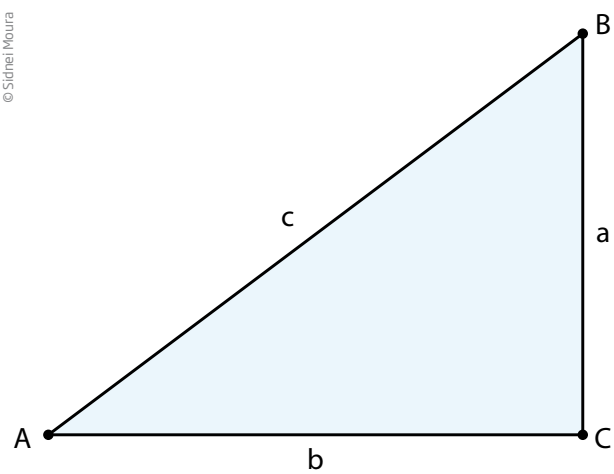


O número de quadradinhos verdes somado com o número de quadradinhos laranjas é igual ao número de quadradinhos azuis.

Em outras palavras, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa (lado maior) é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (lados menores).

Até aqui, foi feita uma exploração com um triângulo particular (de lados 3, 4, 5). Mas a relação que se quer discutir vale para qualquer triângulo retângulo.

© Sidnei Moura



TEOREMA DE PITÁGORAS

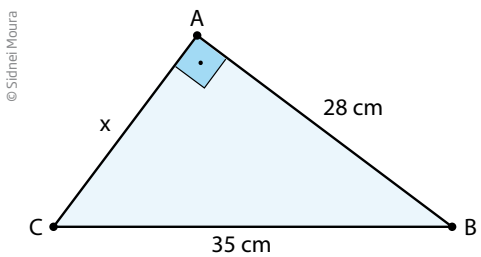
"Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa".

$$a^2 + b^2 = c^2$$

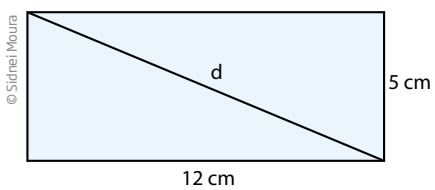
Há centenas de provas do teorema de Pitágoras, que foi batizado com esse nome em homenagem ao filósofo e matemático grego que viveu no século VI a.C., pois a demonstração de Pitágoras foi considerada a mais bela e engenhosa de sua época.

ATIVIDADE 1 Teorema de Pitágoras

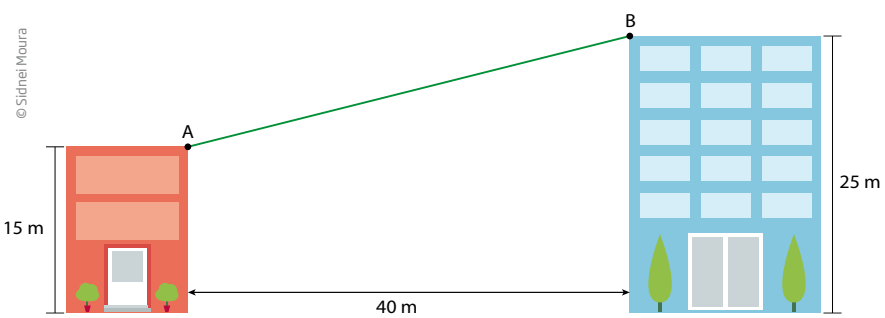
1 O triângulo ABC é retângulo em A; o cateto $\overline{AB}$ mede 28 cm, e a hipotenusa $\overline{BC}$, 35 cm. Determine a medida do cateto $\overline{AC}$.



2 Determine a medida da diagonal de um retângulo de lados 5 cm e 12 cm.

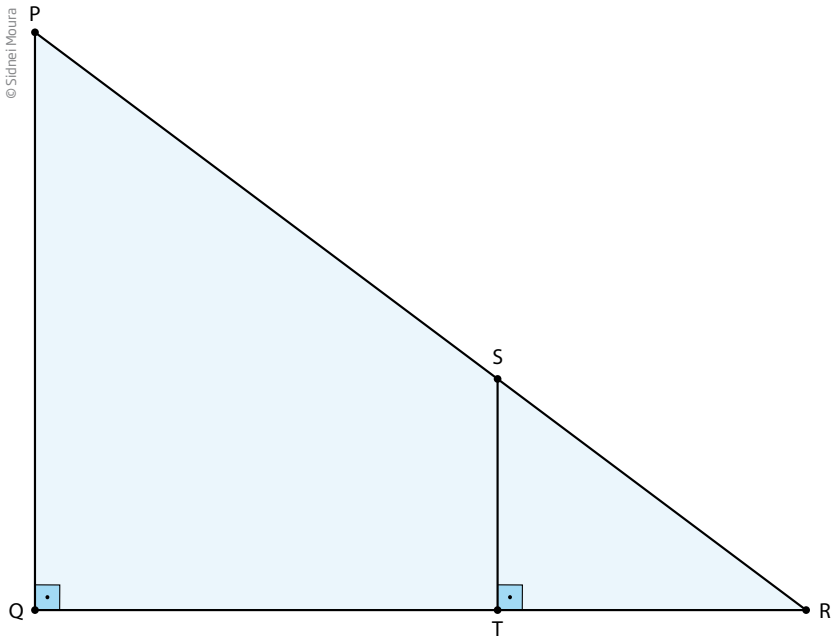


3 Um cabo liga dois edifícios próximos, como se vê na figura a seguir.

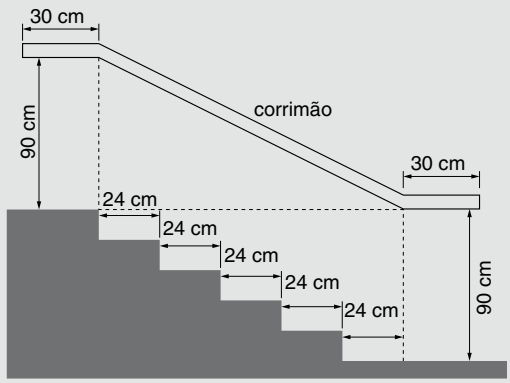


Use os dados indicados na figura para determinar o comprimento do cabo entre os pontos A e B.

4 A figura abaixo representa dois triângulos retângulos encaixados no ângulo cujo vértice é R. Algumas medidas são conhecidas: RS = 5 cm, ST = 3 cm e QT = 6 cm. Determine a medida em centímetros do lado PQ.



DESAFIO



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

a) 1,8 m.

b) 1,9 m.

c) 2,0 m.

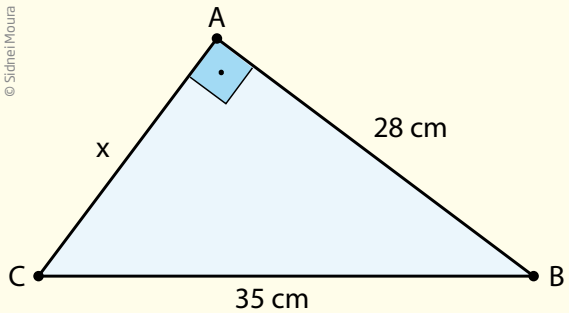
d) 2,1 m.

e) 2,2 m.

Enem 2006. Prova amarela. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2006/2006_amarela.pdf>. Acesso em: 5 set. 2014.

Atividade 1 - Teorema de Pitágoras

1



© Sidnei Moura

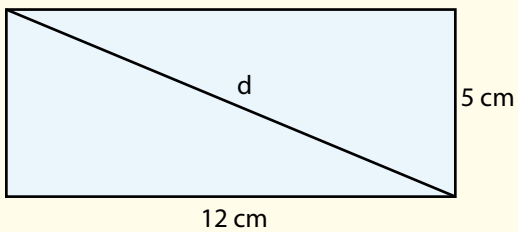
$35^2 = 28^2 + x^2$

$1.225 = 784 + x^2 \Rightarrow x^2 = 1.225 - 784 = 441 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{441} = 21$

O cateto menor, $\overline{AC}$, mede 21 cm.

2 A diagonal do retângulo coincide com a hipotenusa do triângulo retângulo, cujos catetos têm as medidas dos lados do retângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras nesse retângulo, tem-se:

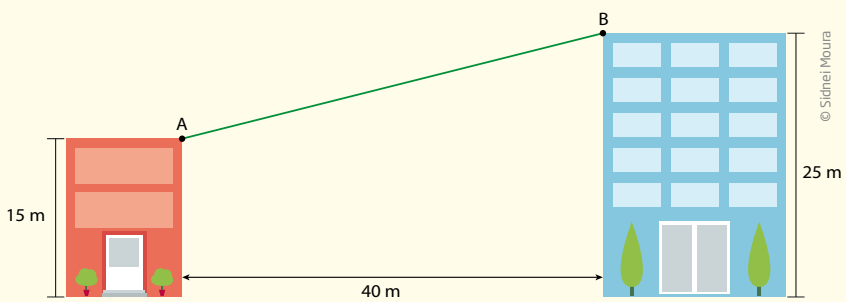


© Sidnei Moura

$d^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow d = \sqrt{169} = 13$

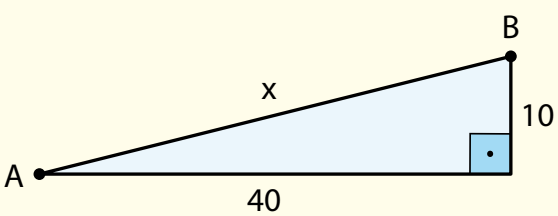
A diagonal do retângulo mede 13 cm.

3



© Sidnei Moura

Para encontrar a medida AB, pode-se destacar o triângulo da figura original e atribuir ao valor desejado a letra **x**, como mostra a figura ao lado.



© Sidnei Moura

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$x^2 = 10^2 + 40^2$

$x^2 = 100 + 1.600$

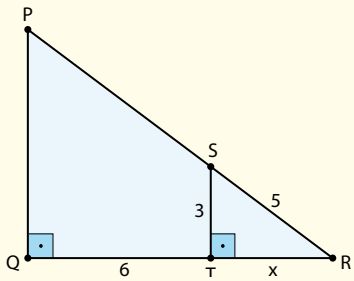
$x^2 = 1.700$

$x \cong 41{,}23$ cm

Use uma calculadora para fazer esse cálculo.

HORA DA CHECAGEM

4



© Sidnei Moura

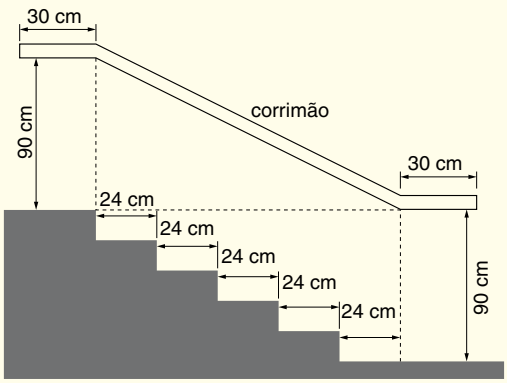
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo STR, obtém-se a medida de TR:

$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} \Rightarrow x = 4$ m

Os triângulos PQR e STR são semelhantes, pois suas medidas são proporcionais, e seus ângulos, congruentes. Assim, é possível determinar a medida do lado PQ por meio do conceito de proporcionalidade:

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{ST}{TR} \Rightarrow \frac{PQ}{10} = \frac{3}{4} \Rightarrow PQ = \frac{30}{4} = 7{,}5 \text{ cm}$$

Desafio



© Daniel Beneventi

Alternativa correta: **d**. Com base na figura, pode-se concluir que o comprimento total do corrimão equivale a 30 cm + região central (x) + 30 cm. A região central do corrimão é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem 24 · 5 cm e 90 cm. Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$x^2 = (24 \cdot 5)^2 + 90^2 \Rightarrow x^2 = 120^2 + 8.100$
$x^2 = 14.400 + 8.100 \Rightarrow x^2 = 22.500 \Rightarrow x = 150$ cm

O comprimento total é igual a 30 + x + 30.

Comprimento total = 30 + 150 + 30 = 210 cm = 2,1 m.

Registro de dúvidas e comentários

GEOMETRIA ANALÍTICA

TEMAS

1. Sistema cartesiano: o ponto
2. A equação da reta

Introdução

O sistema utilizado para representar pontos por meio de **pares ordenados** é chamado **sistema cartesiano** ou **plano cartesiano**, em homenagem ao filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), que, em 1637, publicou um método de resolução de problemas de Geometria usando Álgebra e de problemas de Álgebra usando Geometria. A reunião dessas duas áreas da Matemática é denominada **Geometria Analítica**.



© Erich Lessing/Album Art/Latinstock

O filósofo e matemático René Descartes.

Sistema cartesiano: o ponto — TEMA 1

Neste tema, você aprofundará seus conhecimentos sobre medição de distâncias, e verá como se determina a posição de um ponto por meio de coordenadas.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

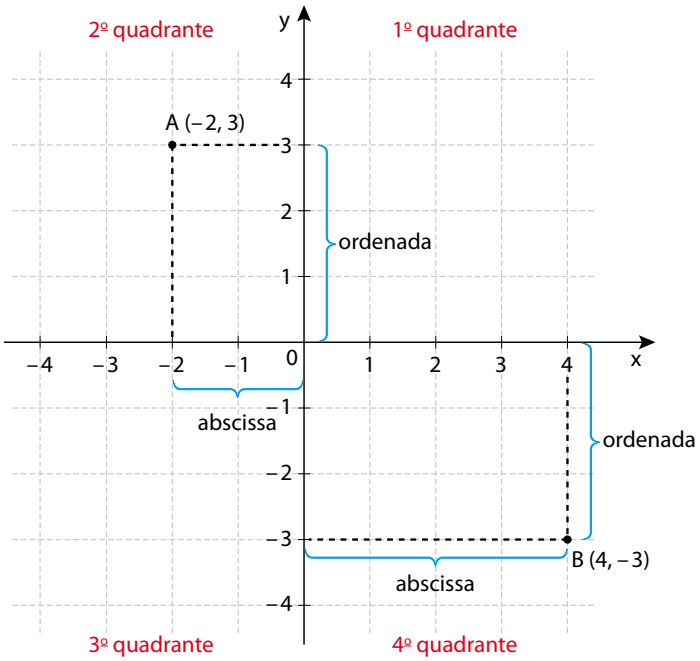
Você já estudou a localização de um ponto da Terra por meio de coordenadas geográficas que indicam a latitude e a longitude? E, para localizar ruas, você já utilizou um mapa com sistema de coordenadas de letras e números? Ao utilizar um celular ou GPS para encontrar determinado lugar, reparou que ele também usa um sistema de coordenadas?

Plano cartesiano

O **plano cartesiano** da Geometria Analítica, tratado nesta Unidade, é o mesmo usado para construir gráficos de funções, sendo constituído por dois eixos perpendiculares e orientados: o eixo das abscissas (horizontal) e o eixo das ordenadas (vertical). Esses dois eixos definem quatro regiões do plano chamadas de **quadrantes**.

Na Geometria Analítica, qualquer ponto do plano cartesiano é representado por um par ordenado (x, y), que é a localização do ponto. O **x** indica a **abscissa**, marcada no eixo horizontal, e o **y** indica a **ordenada**, marcada no eixo vertical.

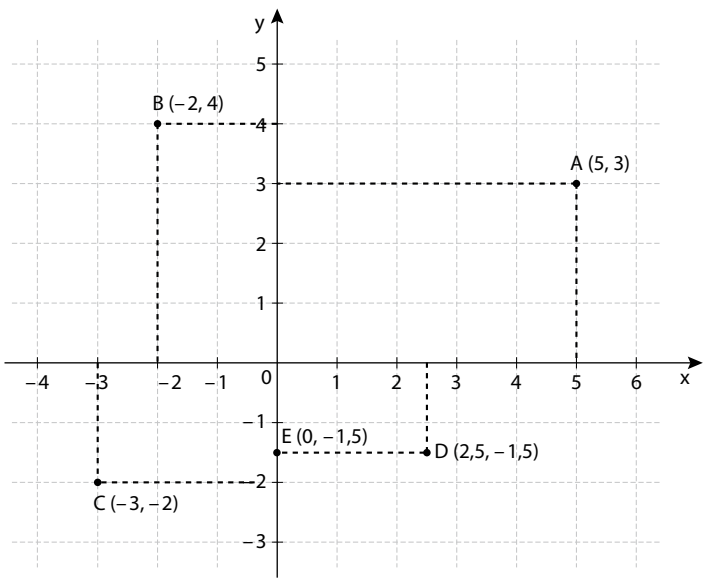
Analisando o sinal dos números do par ordenado, é possível saber em que região do plano o ponto se encontra: no 1º, 2º, 3º ou 4º quadrante.



© Sidnei Moura

Se a abscissa do ponto é positiva, o ponto está à direita do eixo vertical; se a ordenada do ponto é positiva, o ponto está na parte superior do plano cartesiano, acima do eixo horizontal.

Observe, na figura ao lado, que os sinais dos pontos determinam em qual quadrante ele se encontra: o ponto C, por exemplo, que tem todas as coordenadas negativas, está no 3º quadrante. Se você reparar em todos os pontos da figura, perceberá um padrão, conforme a tabela abaixo.



© Sidnei Moura

Sinal da abscissa (x)	Sinal da ordenada (y)	Quadrante
+	+	1º
–	+	2º
–	–	3º
+	–	4º

Com isso, mesmo que um ponto não possa ser visto ou representado no plano cartesiano, é possível saber com segurança em qual quadrante ele se localiza. Por exemplo, (–37, 45) é um ponto do 2º quadrante: à esquerda do eixo das ordenadas e acima do eixo das abscissas.

Com base nas coordenadas dos pontos no plano cartesiano, é possível determinar:

a) a distância entre dois pontos;

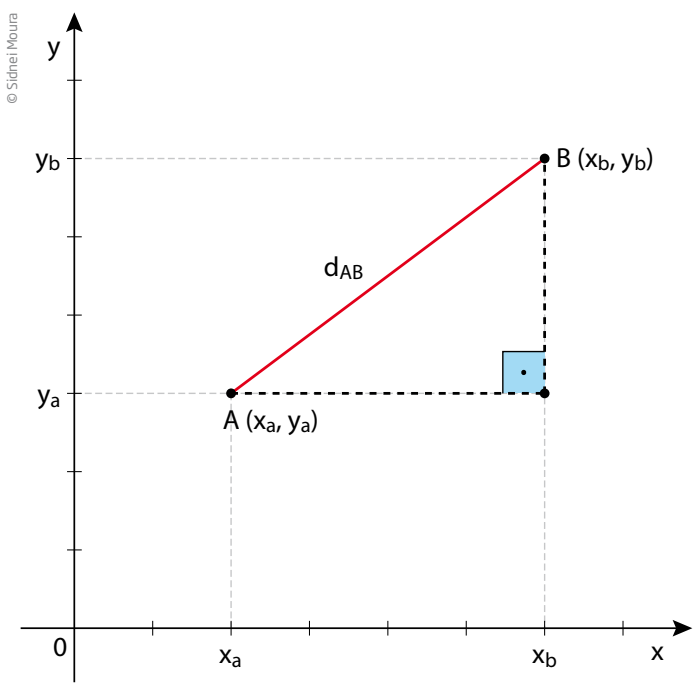
b) se três pontos estão alinhados, ou seja, se pertencem a uma mesma reta;

c) as coordenadas do ponto médio de um segmento.

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos do plano cartesiano, é possível determinar a **distância** entre eles calculando a medida do segmento de reta que tem os dois pontos como extremidades. Para isso, basta aplicar o teorema de Pitágoras.

Sejam os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ no plano cartesiano. Na figura a seguir, esses pontos determinam as extremidades do segmento $\overline{AB}$ e, como esse segmento está inclinado em relação aos eixos, ele coincide com a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $(x_b - x_a)$ e $(y_b - y_a)$.



© Sidnei Moura

LEMBRE!

Teorema de Pitágoras

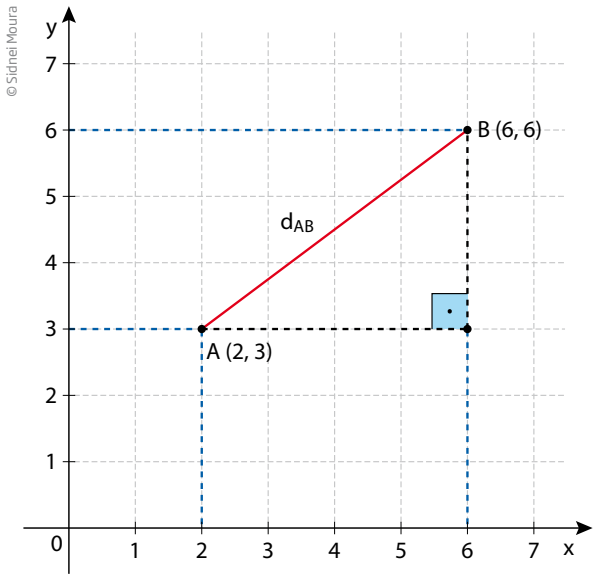
$$h^2 = a^2 + b^2$$

Hipotenusa ao quadrado é igual à soma do quadrado dos catetos.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Pode-se usar essa fórmula para determinar a distância dos pontos A(2, 3) e B(6, 6).

© Sidnei Moura



$$d_{AB} = \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

A distância entre os pontos A e B é, portanto, 5.

Agora, observe o cálculo da distância entre dois pontos, P(–2, –3) e Q(3, 9), aplicando-se essa fórmula, mas sem representá-los graficamente. Note que P é um ponto do 3º quadrante, e Q, um ponto do 1º quadrante.

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

$$\sqrt{(3-(-2))^2 + (9-(-3))^2} = \sqrt{(3+2)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

A distância entre os pontos P e Q é 13.

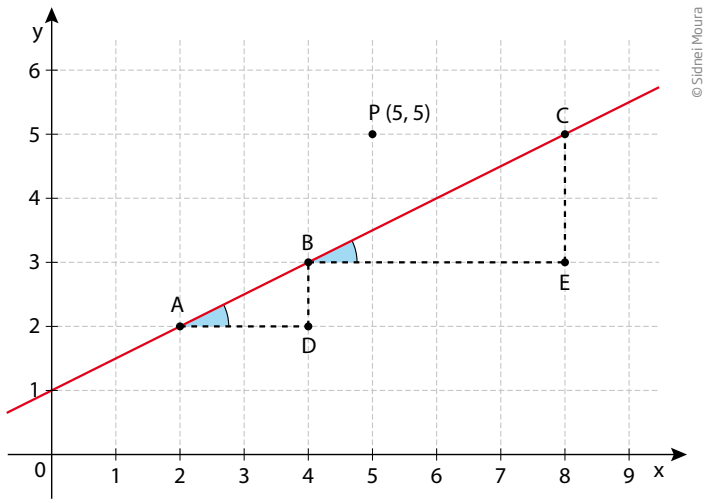
Alinhamento de três pontos

© Daniel Beneventi



Outro problema que se pode resolver utilizando as coordenadas do plano cartesiano é determinar se três pontos estão alinhados.

Observe a figura a seguir. Para que os pontos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ estejam alinhados, os ângulos indicados (BÂD e CÊE) têm que ser iguais, garantindo a direção da reta tracejada.



Como se trata de triângulos retângulos, os triângulos ABD e BCE devem ser semelhantes, com lados proporcionais, ou seja, a razão entre as medidas dos lados correspondentes deve ser a mesma. Veja:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{x_D - x_A}{x_E - x_B} = \frac{y_B - y_D}{y_C - y_E} \quad (I)$$

Na figura apresentada, tem-se A(2, 2), B(4, 3) e C(8, 5) e os pontos auxiliares: D(4, 2) e E(8, 3). Substituindo as coordenadas em (I), tem-se:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{4-2}{8-4} = \frac{3-2}{5-3} = \frac{1}{2}$$

Se a razão entre as medidas dos lados correspondentes é a mesma, então ABD e BCE são triângulos semelhantes e, portanto, os ângulos indicados na figura são iguais.

Outro modo de verificar se três pontos estão alinhados é organizar as coordenadas dos pontos em uma **tabela** e usar um dispositivo prático de multiplicação em cruz.

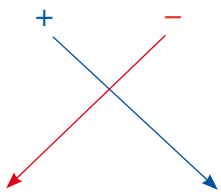
As coordenadas dos três pontos devem ser organizadas de modo que as abscissas fiquem na primeira linha da tabela e as ordenadas na segunda linha. Na quarta coluna, devem ser repetidas as coordenadas da primeira coluna. Observe o exemplo:

Abscissas → $x_a \quad x_b \quad x_c \quad x_a$

Ordenadas → $y_a \quad y_b \quad y_c \quad y_a$

$= 0$

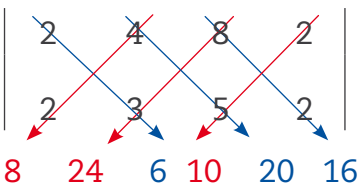
Deve-se fazer as multiplicações em cruz e subtrair os resultados de acordo com o esquema indicado:



$$(x_a \cdot y_b + x_b \cdot y_c + x_c \cdot y_a) - (x_b \cdot y_a + x_c \cdot y_b + x_a \cdot y_c) = 0$$

> IMPORTANTE!
> A condição necessária para que haja o alinhamento dos três pontos, por esse método, é que o resultado seja 0 (zero).

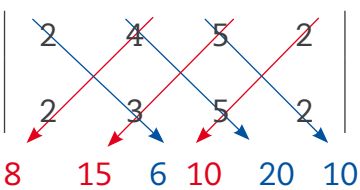
Veja a aplicação desse dispositivo para conferir se os pontos A(2, 2), B(4, 3) e C(8, 5) representados na figura do exemplo anterior estão alinhados:



$$(6 + 20 + 16) - (8 + 24 + 10) = 42 - 42 = 0$$

Como o resultado é zero, então os pontos estão alinhados.

Agora, acompanhe a aplicação desse dispositivo para três pontos que, sabe-se de antemão, não estão alinhados: A(2, 2), B(4, 3) e P(5, 5).



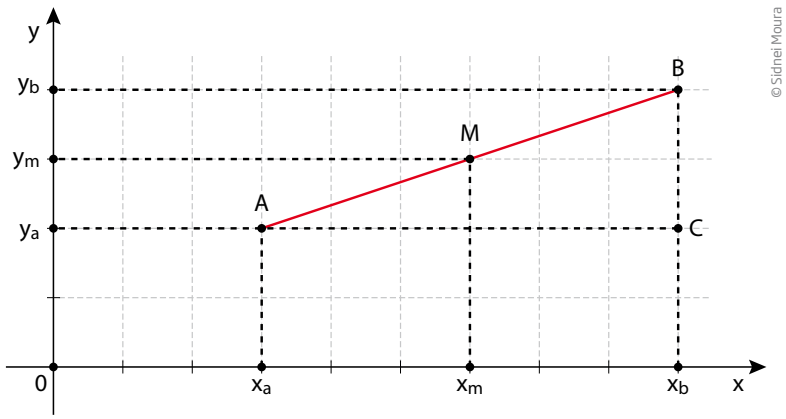
$$(6 + 20 + 10) - (8 + 15 + 10) = 36 - 33 = 3 \neq 0$$

Veja que, nesse caso, o resultado é diferente de 0 (zero), portanto os pontos não estão alinhados.

Ponto médio de um segmento

Sejam dois pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$. É possível determinar as coordenadas do ponto médio $M(x_m, y_m)$ calculando as médias aritméticas das abscissas e das ordenadas: $M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$.

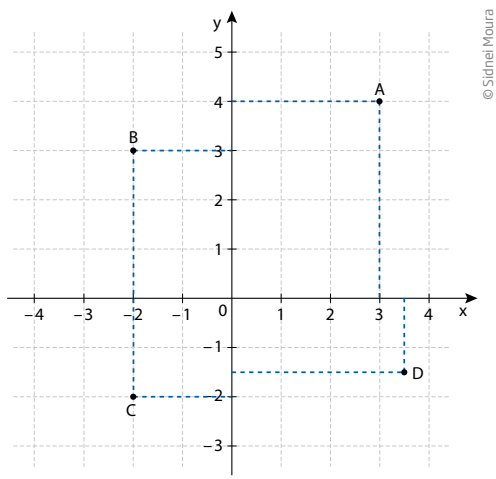
No exemplo da figura a seguir, veem-se as coordenadas dos pontos A e B: A(3, 2) e B(9, 4).



Veja como ficaria o cálculo: $M\left(\frac{3+9}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = M\left(\frac{12}{2}, \frac{6}{2}\right) = M(6, 3)$.

ATIVIDADE 1 Pontos

1 Dê as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.

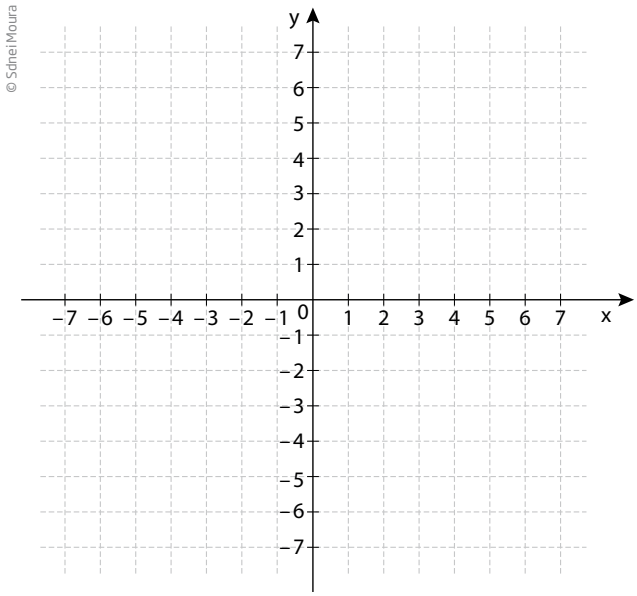


2 Sejam os pontos A(3, 4), B(−2, 3), C(2, 0), D(0, −3), $E(-\frac{3}{2}, -5)$, F(−1, 1) e G(2, −2).

a) Indique quais são os pontos do 3º quadrante.

b) Indique quais são os pontos que estão sobre os eixos.

c) Represente no mesmo plano cartesiano os pontos indicados.



3 Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) ☐ O ponto A(3, 0) está sobre o eixo das ordenadas.

b) ☐ O ponto B(0, −2) está sobre o eixo das abscissas.

c) ☐ O ponto C(−5, 0) está sobre o eixo das abscissas.

d) ☐ O ponto D(0, 12) está sobre o eixo das ordenadas.

4 Determine as distâncias entre os seguintes pontos:

a) P(4, 3) e Q(7, 3)

b) P(4, 7) e Q(4, 3)

c) P(−7, −5) e Q(5, 0)

d) P(4, −1) e Q(4, 1)

5 Calcule a distância entre os pontos (0, 0) e (3, 4).

6 Sejam os pontos A(−3, 1) e B(4, 4). A distância entre eles é:

a) 7

b) $\sqrt{15}$

c) $\sqrt{58}$

d) 49

e) 16

7 A distância entre A(1, 3) e B(5, 6) é:

a) 5

b) 10

c) 15

d) 20

e) 25

8 O comprimento da circunferência de diâmetro CD, sendo C(2, 1) e D(10, 7), é:

a) 5π

b) 10π

c) 20π

d) 17π

e) 29π

LEMBRE!

O comprimento de uma circunferência é $2\pi r$, e seu diâmetro é $2r$.

9 Entre os pontos de cada item a seguir, verifique quais estão alinhados:

a) (−1, −1), (1, 1) e (2, 5)

b) (−2, −2), (1, 1) e (2, 2)

c) (−2, 3), (−3, 2) e (0, 0)

d) (6, −9), (0, 0) e (−2, 3)

10 Determine o valor de **m** para que os pontos (m, 2), (3, 1) e (0, –1) estejam alinhados.

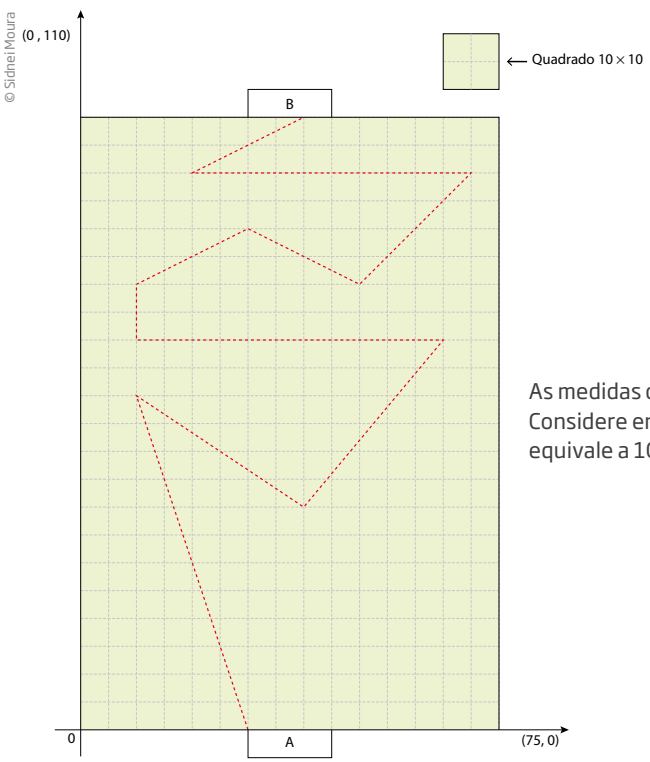
11 Em cada caso, determine as coordenadas do ponto médio:

a) (2, 6) e (12, 20)

b) (–3, 5) e (3, –5)

12 Sabendo que os pontos A(1, 1) e B(9, 7) são extremidades do diâmetro de uma circunferência, determine a coordenada do centro e a medida do raio dessa circunferência.

13 Em uma partida de futebol, a bola partiu do gol no ponto A, percorrendo um caminho que passou pelos pontos identificados pelas coordenadas (3, 0), (1, 6), (4, 4), (6, 7), (1, 7), (1, 8), (3, 9), (5, 8), (7, 10), (2, 10), até o gol oposto, em B(4, 11), conforme indicado na figura a seguir.



As medidas do campo de futebol oficial são 75 m × 110 m. Considere então que a distância do ponto (0, 0) ao ponto (1, 0) equivale a 10 m.

Suponha que a bola se desloque no espaço sempre em linha reta e responda:

a) Quantos metros a bola percorreu?

b) Sabendo que a bola levou 30 s para percorrer sua trajetória, qual é a velocidade média da bola do gol A até o gol B em m/s?

LEMBRE!

Para calcular a velocidade média, use a fórmula: $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Pontos

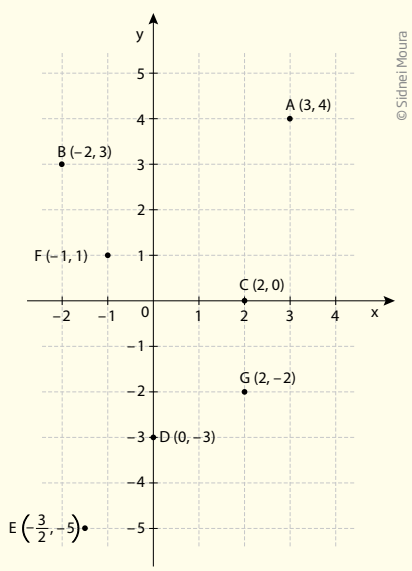
1 As coordenadas são: A(3, 4); B(–2, 3); C(–2, –2); $D\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

2

a) O ponto do 3º quadrante é $E\left(-\frac{3}{2}, -5\right)$.

b) Os pontos que estão sobre os eixos são: C(2, 0) e D(0, –3).

c)



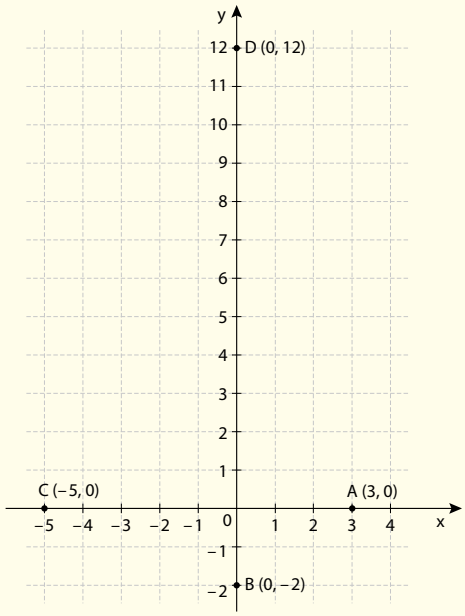
3

a) F O ponto A(3, 0) está sobre o eixo das abscissas.

b) F O ponto B(0, –2) está sobre o eixo das ordenadas.

c) V

d) V



É importante perceber que, se x = 0, o ponto está sobre o eixo das ordenadas; se y = 0, o ponto está sobre o eixo das abscissas.

4 Para resolver esse exercício, lembre que $d_{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

a) $d = \sqrt{(7-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$

b) $d = \sqrt{(4-4)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$

c) $d = \sqrt{(5-(-7))^2 + (0-(-5))^2} = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

d) $d = \sqrt{(4-4)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$

Neste exercício, é importante notar que, se dois pontos têm abscissas iguais, o segmento que eles formam é paralelo ao eixo das ordenadas, e sua distância é o valor em módulo da diferença de suas ordenadas.

Da mesma forma, se dois pontos têm ordenadas iguais, o segmento que eles formam é paralelo ao eixo das abscissas e sua distância é o valor em módulo da diferença de suas abscissas.

5 $d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

6 Alternativa correta: **c**.

$d_{AB} = \sqrt{(4-(-3))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

7 Alternativa correta: **a**.

$d_{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

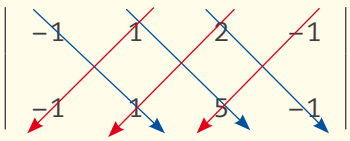
8 Alternativa correta: **b**. Para saber a medida do comprimento de uma circunferência, é necessário apenas determinar a medida de seu diâmetro. Assim, calcula-se a distância entre os pontos C e D:

$d_{AB} = \sqrt{(10-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

Portanto, o comprimento dessa circunferência é $C = \pi \cdot 10 = 10\pi$.

9

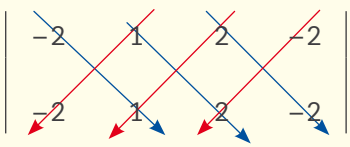
a)



$(-1 + 5 - 2) - (-1 + 2 - 5) = 2 + 4 = 6 \neq 0$

Não estão alinhados.

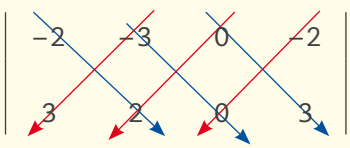
b)



$(-2 + 2 - 4) - (-2 + 2 - 4) = -4 + 4 = 0$

Estão alinhados.

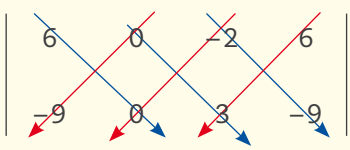
c)



$(-4 - 0 + 0) - (-9 + 0 - 0) = -4 + 9 = 5 \neq 0$

Não estão alinhados.

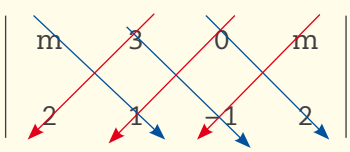
d)



$(0 + 0 + 18) - (0 - 0 + 18) = 18 - 18 = 0$

Estão alinhados.

10



$(m - 3 + 0) - (6 + 0 - m) = (m - 3) - (6 - m) = m - 3 - 6 + m = 2m - 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{2} = 4{,}5$

Para que os pontos fiquem alinhados, o valor de **m** deve ser 4,5.

HORA DA CHECAGEM

11

a) $x_m = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7$; $y_m = \frac{6 + 20}{2} = \frac{26}{2} = 13$ → M(7, 13)

b) $x_m = \frac{-3 + 3}{2} = \frac{0}{2} = 0$; $y_m = \frac{5 + (-5)}{2} = \frac{0}{2} = 0$ → M(0, 0)

12 Para encontrar as coordenadas do centro C(x, y), é preciso lembrar que o centro é o ponto médio do diâmetro; portanto:

$x_c = \frac{1 + 9}{2} = \frac{10}{2} = 5$; $y_c = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Para calcular a medida do raio, basta calcular a distância do centro C(5, 4) a qualquer ponto da extremidade do diâmetro, por exemplo A(1, 1):

$r = d_{Ac} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

13

a) Uma calculadora pode ajudá-lo a calcular as raízes encontradas.

Primeiro, calculam-se as distâncias dos segmentos, saindo do ponto A e chegando ao ponto B. Para tanto, é preciso atribuir letras para cada ponto dado: A(3, 0), C(1, 6), D(4, 4), E(6, 7), F(1, 7), G(1, 8), H(3, 9), I(5, 8), J(7, 10), K(2, 10) e B(4, 11). Em seguida, calcular as distâncias:

d_{AC}, d_{CD}, d_{DE}, d_{EF}, d_{FG}, d_{GH}, d_{HI}, d_{IJ}, d_{JK} e d_{KB}.

Assim:

$d_{AC} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \cong 6{,}32$

$d_{CD} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \cong 3{,}60$

$d_{DE} = \sqrt{(6 - 4)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \cong 3{,}60$

$d_{EF} = \sqrt{(1 - 6)^2 + (7 - 7)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 0} = \sqrt{25} = 5$

$d_{FG} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (8 - 7)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$

$d_{GH} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (9 - 8)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \cong 2{,}24$

$d_{HI} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (8 - 9)^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \cong 2{,}24$

$d_{IJ} = \sqrt{(7 - 5)^2 + (10 - 8)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \cong 2{,}83$

$d_{JK} = \sqrt{(2 - 7)^2 + (10 - 10)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 0} = \sqrt{25} = 5$

$d_{KB} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (11 - 10)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \cong 2{,}24$

Depois, somam-se as distâncias que a bola percorreu em cada trecho, sem esquecer de multiplicar o resultado por 10 (escala do gráfico).

Distância = $(6{,}32 + 3{,}60 + 3{,}60 + 5 + 1 + 2{,}24 + 2{,}24 + 2{,}83 + 5 + 2{,}24) \cdot 10 = 34{,}07 \Rightarrow 34{,}07 \cdot 10 = 340{,}7$ m.

A distância aproximada percorrida pela bola é 340,7 m.

b) $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{340{,}7}{30} \cong 11{,}4$ m/s

A velocidade média da bola no percurso foi de 11,4 m/s.

Registro de dúvidas e comentários

Neste tema, você vai ver como traçar uma reta por meio da determinação de dois de seus pontos no plano cartesiano.

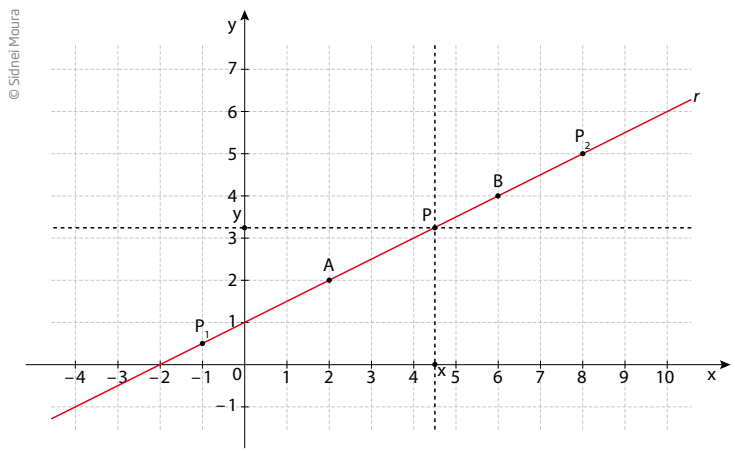
O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já percebeu que os trilhos do metrô e do trem são formados por retas, que mantêm a mesma distância uma da outra em todo o seu percurso? E que, no mapa do metrô, algumas linhas se cruzam em determinados pontos?

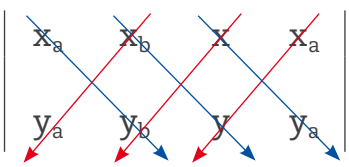
O estudo da reta

Equação geral da reta

Imagine um ponto P móvel que esteja sempre alinhado a dois pontos fixos, A e B. Nessas condições, esse ponto P pode ocupar infinitas posições, e esses infinitos pontos alinhados aos pontos A e B determinam uma reta.



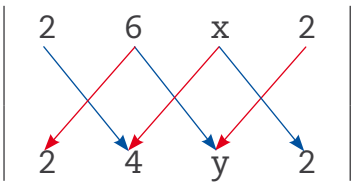
Considerando o que você já sabe sobre o alinhamento de pontos:



$(x_a \cdot y_b + x_b \cdot y + x \cdot y_a) - (x_b \cdot y_a + x \cdot y_b + x_a \cdot y) = 0$

Mas essa expressão, com todos os seus índices e letras, não ajudará a compreender o que será tratado a partir daqui. Existe outra forma que auxilia a melhor entender as condições que um ponto P(x, y) deve satisfazer para estar alinhado a outros dois, os pontos A e B.

Considere dois pontos, A(2, 2) e B(6, 4) e substitua os valores das coordenadas desses dois pontos no dispositivo prático:



$(2 \cdot 4 + 6y + 2x) - (6 \cdot 2 + 4x + 2y) = 0$

$(8 + 6y + 2x) - (12 + 4x + 2y) = 0$

Eliminando os parênteses e agrupando os termos semelhantes:

$$8 - 12 + 2x - 4x + 6y - 2y = 0 \Rightarrow -2x + 4y - 4 = 0$$

Para ficar mais elegante, pode-se multiplicar tudo por -1 e obter a equação $2x - 4y + 4 = 0$. Dividindo os dois membros por 2, obtém-se:

$$x - 2y + 2 = 0$$

que é **a equação geral da reta** que passa pelos pontos A(2, 2) e B(6, 4).

Qualquer ponto (x, y) alinhado aos pontos A e B deve satisfazer a essa equação.

Explorações da equação da reta $x - 2y + 2 = 0$

• No gráfico apresentado, o ponto (0, 1) do eixo das ordenadas parece estar alinhado aos pontos A e B. Substituindo-se na equação para verificar:

$x - 2y + 2 = 0$

$(0) - 2 \cdot (1) + 2 = 0 - 2 + 2 = 0$

Portanto, pode-se dizer que o ponto (0, 1) pertence à reta *r* determinada pelos pontos A e B.

• O gráfico sugere que o ponto (1, 0) do eixo das abscissas não pertence à reta. Para conferir sua veracidade substituem-se os valores numéricos do par ordenado na equação:

$x - 2y + 2 = 0$

$(1) - 2 \cdot (0) + 2 = 1 - 0 + 2 = 3 \neq 0$

Assim, pode-se concluir que o ponto (1, 0) não pertence à reta *r*, ou seja, não está alinhado aos pontos A e B.

• Descobrir qual é o valor da ordenada do ponto (8, y) para que ele pertença à reta *r*.

Qualquer ponto da reta *r* deve satisfazer à equação $x - 2y + 2 = 0$.

Substituindo (8, y) na equação, tem-se:

$x - 2y + 2 = 0$

$(8) - 2 \cdot (y) + 2 = 8 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow -2y + 10 = 0$

Resolvendo a equação: $2y = 10 \Rightarrow y = 5$

O ponto (8, 5) está alinhado aos pontos A(2, 2) e B(6, 4).

• Determinar o ponto do eixo das abscissas pertencente à reta que contém os pontos A e B.

Um ponto do eixo das abscissas é do tipo (x, 0).

Substituindo na equação, tem-se:

$x - 2y + 2 = 0$

$x - 2 \cdot (0) + 2 = 0 \Rightarrow x - 0 + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

O ponto (–2, 0) pertence à reta que passa pelos pontos A e B.

Resumindo: O conjunto de todos os pontos do plano cartesiano alinhados a dois pontos fixos define uma reta.

Toda equação do tipo **ax + by + c = 0**, com **a**, **b** e **c** pertencentes aos números reais, é chamada **equação geral da reta**.

Equação reduzida da reta

Uma única reta no plano cartesiano pode ser representada de várias maneiras, pois sempre é possível fazer alguma manipulação algébrica para produzir equações equivalentes.

Veja o exemplo da equação **2x – 4y + 4 = 0**

São possíveis as seguintes transformações:

Trocar as posições dos termos da equação	$4 + 2x - 4y = 0$
Somar 10 aos dois membros	$14 + 2x - 4y = 10$
Subtrair 7 dos dois membros	$7 + 2x - 4y = 3$
Multiplicar tudo por 5	$35 + 10x - 20y = 15$
Dividir tudo por 10	$3{,}5 + x - 2y = 1{,}5$

Qualquer uma dessas equações representa a mesma reta que passa pelos pontos A(2, 2) e B(6, 4). Para conferir, substituem-se os valores dos pares ordenados, e assim verifica-se que a igualdade é verdadeira em todos os casos.

Dada uma equação geral do tipo $ax + by + c = 0$ com **a**, **b** e **c** $\in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, pode-se isolar o **y** e dividir os dois membros por **b** para obter uma equação equivalente:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

Como $-\frac{a}{b}$ e $-\frac{c}{b}$ são números reais, chamando $-\frac{a}{b}$ de **m** e $-\frac{c}{b}$ de **n**, pode-se reescrever a equação, que fica **y = mx + n**, chamada de **forma reduzida da equação da reta**.

Seja a equação $-6x + 3y + 9 = 0$. Isolando a variável **y**, obtém-se $3y = 6x - 9$. Dividindo tudo por 3, tem-se $y = \frac{6x}{3} - \frac{9}{3} = 2x - 3$.

As equações $-6x + 3y + 9 = 0$ e $y = 2x - 3$ são equivalentes e representam a mesma reta; a primeira está na forma de equação geral da reta, e a segunda, na forma reduzida.

Retome a equação da reta **2x – 4y + 4 = 0** que passa pelos pontos A(2, 2) e B(6, 4):

$2x - 4y + 4 = 0$ isolando o termo em **y** no primeiro membro, fica...

$-4y = -2x - 4$ multiplicando tudo por –1, tem-se...

$4y = 2x + 4$ dividindo tudo por 4, tem-se...

$y = \frac{2x}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{2}x + 1$

A equação $y = \frac{1}{2}x + 1$ é chamada **equação reduzida da reta**; o coeficiente $\frac{1}{2}$ da variável **x** é chamado **coeficiente angular** da reta; e o coeficiente independente 1 é chamado **coeficiente linear**.

A equação de uma reta na forma reduzida é do tipo:

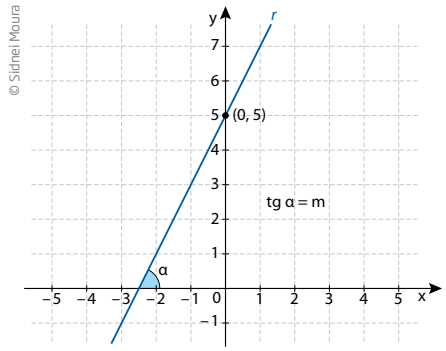
$$y = mx + n$$

Observe que essa forma se assemelha à expressão de uma função de 1º grau.

m é o coeficiente angular da reta e determina a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas; **m** é o valor numérico da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas.

n é o coeficiente linear da reta se x = 0, então

y = m · 0 + n → y = n, ou seja, o ponto (0, n) pertence à reta, o que significa que **n** é o ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas.



É muito útil saber o papel dos coeficientes da equação na forma reduzida, para saber mais sobre a reta que está sendo representada.

Comparando os coeficientes angulares de duas equações de retas, pode-se saber suas posições relativas. Conhecendo o coeficiente linear de uma equação de reta, pode-se determinar a intersecção dessa reta com o eixo das ordenadas.

Para compreender melhor, considere as equações das retas *r*, *s* e *t*:

r: $2x - y + 5 = 0$

s: $-x - y + 5 = 0$

t: $6x - 3y - 12 = 0$

É possível reescrever essas equações na forma reduzida e tirar conclusões sobre suas posições no plano cartesiano. Para tanto, em cada caso, isola-se **y** no primeiro membro:

- $2x - y + 5 = 0 \Rightarrow -y = -2x - 5$

Multiplicando os dois membros por –1, tem-se:

$y = 2x + 5$

- $-x - y + 5 = 0 \Rightarrow -y = x - 5$

Multiplicando os dois membros por –1, tem-se:

$y = -x + 5$

- $6x - 3y - 12 = 0 \Rightarrow -3y = -6x + 12$

Dividindo os dois membros por –3, tem-se:

$y = 2x - 4$

Agora, observe a análise dos coeficientes das três retas:

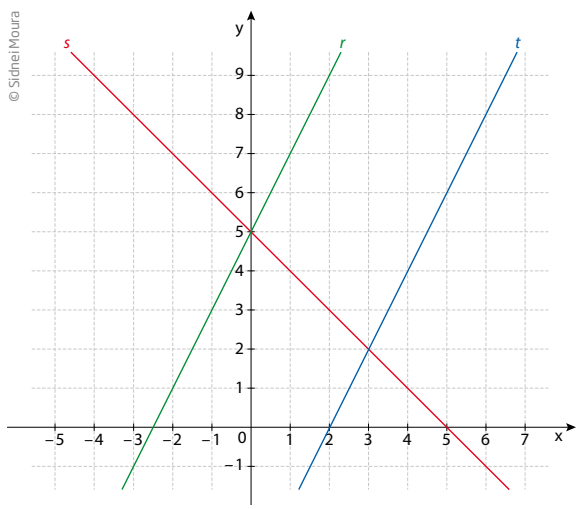
		Coeficientes	
Reta	Forma reduzida	Angular	Linear
r	y = 2x + 5	m = 2	n = 5
s	y = −x + 5	m = −1	n = 5
t	y = 2x − 4	m = 2	n = −4

Observe que os coeficientes angulares das retas *r* e *t* são iguais (m = 2). Isso significa que as duas retas têm a mesma inclinação em relação ao eixo das abscissas, ou seja, as retas *r* e *t* são **paralelas**.

Como o coeficiente angular da reta *s* é diferente dos coeficientes angulares de *r* e *t*, pode-se concluir que as retas *r* e *s* se interceptam (são **concorrentes**), assim como as retas *s* e *t*.

As retas *r* e *s* têm o mesmo coeficiente linear, ou seja, interceptam o eixo das ordenadas no mesmo ponto n = 5; a reta *t* intercepta o eixo das ordenadas no ponto n = −4.

Veja como ficariam as retas *r*, *s* e *t* no plano cartesiano:



ATIVIDADE 1 Retas

1 Determine a equação da reta que passa pelos pontos:

a) A(0, 0) e B(2, 3)

b) C(−1, 2) e D(3, 4)

2 Determine a equação da reta que passa pelos pontos (3, 0) e (0, 4) na forma geral e reduzida.

3 Determine os coeficientes angulares e lineares de cada uma das retas cujas equações são:

a) $2x + 3y + 6 = 0$

b) $-3x + 5y - 15 = 0$

4 Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos:

a) (1, 2) e (2, 5)

b) (1, 2) e (2, 4)

c) (2, 2) e (5, 5)

5 Analise as equações I, II, III e IV. Depois, assinale a alternativa correta.

I) $x - y + 3 = 0$

II) $2x - 2y + 5 = 0$

III) $y = \frac{1}{2}x + 3$

IV) $-4x + 2y - 8 = 0$

a) As retas I e III são paralelas.

b) As retas I, II e IV têm coeficientes lineares iguais.

c) As retas I e II são paralelas com o mesmo coeficiente linear.

d) As retas II e III são concorrentes, pois seus coeficientes lineares são diferentes.

e) As retas I e II são paralelas, independentemente do valor do coeficiente linear de ambas.

6 Quais das retas abaixo interceptam o eixo das ordenadas no ponto $y = 7$?

a) $x + y + 7 = 0$

b) $x - y + 7 = 0$

c) $x + y - 7 = 0$

d) $y - x + 7 = 0$

e) $y = 7x$

7 Qual das retas abaixo intercepta o eixo das ordenadas no ponto $y = -2$?

a) $2x + y + 4 = 0$

b) $-2x - y + 2 = 0$

c) $x + y + 2 = 0$

d) $3x - y + 6 = 0$

e) $y = 2x$

8 Há uma regra que permite saber se duas retas são perpendiculares, isto é, se formam um ângulo reto: basta multiplicar seus coeficientes angulares e verificar se o resultado é -1.

Se duas retas, r e s, são perpendiculares, então $m_r \cdot m_s = -1$

Determine quais entre as retas a seguir são perpendiculares:

r: $2x + y + 1 = 0$ t: $x - 4y + 4 = 0$

s: $x + 2y + 6 = 0$ u: $y = 2x + 3$

9 São dadas duas retas, r e s, cujas equações são:

r: $2x + 3y + 6 = 0$ s: $-3x + 2y - 6 = 0$

a) Verifique se essas retas se interceptam ou se elas são paralelas.

DICA!
Resolva o sistema formado pelas duas equações.

b) No caso de se interceptarem, encontre o ponto de intersecção entre as duas retas.

10 Qual, entre as retas abaixo, contém o ponto P(2, −3)?

a) $2x + 3y + 6 = 0$ b) $5x + 4y + 2 = 0$

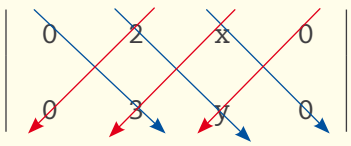
11 Determine a equação da reta que intercepta o eixo das abscissas no ponto x = 5 e o eixo das ordenadas no ponto y = 2.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Retas

1

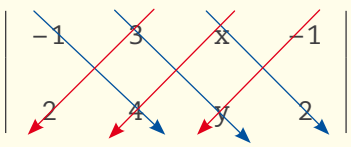
a)



(0 + 2y + 0) – (0 + 3x + 0) = 0

2y – 3x = 0 → equação geral da reta

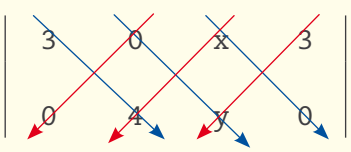
b)



(–4 + 3y + 2x) – (6 + 4x – y) = 0 → –4 + 3y + 2x – 6 – 4x + y = 0

–2x + 4y – 10 = 0 ou, dividindo ambos os membros por –2, x – 2y + 5 = 0 → equação geral da reta

2



(12 + 0y + 0x) – (0 + 4x + 3y) = 0 ⇒ 12 – 3y – 4x = 0

–4x – 3y + 12 = 0 → equação geral da reta

$y = \frac{(4x - 12)}{-3}$

$y = -\frac{4x}{3} + 4$ → equação reduzida da reta

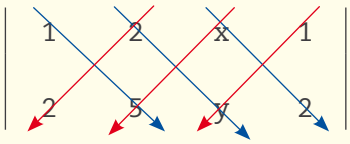
3 Para resolver este exercício, encontram-se as equações reduzidas de cada item *e*, em seguida, verificam-se os coeficientes angular e linear.

a) $2x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{(-2x - 6)}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$ e $n = -2$

b) $-3x + 5y - 15 = 0 \Rightarrow y = \frac{(3x + 15)}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + 3 \Rightarrow m = \frac{3}{5}$ e $n = 3$

4

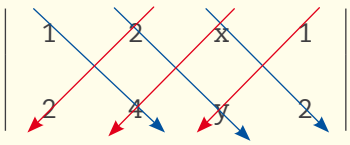
a)



$(5 + 2y + 2x) - (4 + 5x + y) = 0 \Rightarrow 5 + 2y + 2x - 4 - 5x - y = 0 \Rightarrow -3x + y + 1 = 0$

$y = 3x - 1 \rightarrow$ equação reduzida da reta

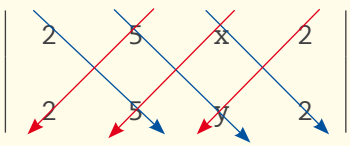
b)



$(4 + 2y + 2x) - (4 + 4x + y) = 0 \Rightarrow 4 + 2y + 2x - 4 - 4x - y = 0 \Rightarrow y - 2x = 0$

$y = 2x \rightarrow$ equação reduzida da reta

c)



$(10 + 5y + 2x) - (10 + 5x + 2y) = 0 \Rightarrow 10 + 5y + 2x - 10 - 5x - 2y = 0 \Rightarrow -3x + 3y = 0$

$y = \frac{3x}{3} \Rightarrow y = x \rightarrow$ equação reduzida da reta

5 Alternativa correta: **e**. As retas I e II são paralelas, pois a equação reduzida de I é $y = x + 3$, a equação reduzida de II é $y = x + \frac{5}{2}$ e seus coeficientes angulares são iguais ($m_1 = m_2$).

6 Alternativas corretas: **b** e **c**. Para interceptar o eixo das ordenadas, o valor de **x** deve ser 0. Logo:

- a equação do item *b* satisfaz a condição de $x - y + 7 = 0 \Rightarrow 0 - y + 7 = 0 \Rightarrow -y = -7 \Rightarrow y = 7$;
- a equação do item *c* satisfaz a condição de $x + y - 7 = 0 \Rightarrow 0 + y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$.

7 Alternativa correta: **c**. Para interceptar o eixo das ordenadas, o valor de **x** deve ser 0. Logo, a equação do item *c* satisfaz a condição de $x + y + 2 = 0 \Rightarrow 0 + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$.

8 Encontrando as equações reduzidas de *r*, *s* e *t*, tem-se:

r: $y = -2x - 1$

s: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

t: $y = \frac{1}{4}x + 1$

A equação *u*: $y = 2x + 3$ já se encontra na forma reduzida. Substituindo seus coeficientes angulares na relação $m_1 \cdot m_2 = -1$, obtém-se que as retas perpendiculares são *s* e *u*.

$m_s \cdot m_u \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2) = -1$.

9

a) Encontrando as equações reduzidas de *r* e *s*, tem-se *r*: $y = -\frac{2}{3}x - 3$ e *s*: $y = \frac{3}{2}x + 3$. Conclui-se que não são paralelas, pois $m_r \neq m_s$.

Porém, $m_r \cdot m_s = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -1$; logo, elas são perpendiculares.

b) Para ver qual é o ponto de intersecção, deve-se resolver o sistema:

$2x + 3y + 6 = 0 \quad (\cdot 3) \quad \Rightarrow \quad 6x + 9y + 18 = 0$

$-3x + 2y - 6 = 0 \quad (\cdot 2) \quad \Rightarrow \quad -6x + 4y - 12 = 0$

Somando-se as duas equações, tem-se $13y + 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{6}{13}$

Substituindo em uma das equações $y = -\frac{6}{13}$, obtém-se:

$2x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow 2x + 3 \cdot \left(-\frac{6}{13}\right) + 6 = 0 \Rightarrow 26x - 18 + 78 = 0 \Rightarrow 26x = -60 \Rightarrow x = -\frac{60}{26} \Rightarrow x = -\frac{30}{13}$

O ponto de intersecção é $P\left(-\frac{30}{13}, -\frac{6}{13}\right)$.

10 Para resolver essa questão, basta substituir os valores numéricos das coordenadas do ponto P nas equações e verificar se a igualdade é mantida.

a) $2 \cdot (2) + 3 \cdot (-3) + 6 = 0 \rightarrow 4 - 9 + 6 = 1 \neq 0$

Não pertence.

b) $5 \cdot (2) + 4 \cdot (-3) + 2 = 0 \rightarrow 10 - 12 + 2 = 0$

Pertence.

HORA DA CHECAGEM

11 O ponto de intersecção com o eixo das abscissas é (5, 0) e com o eixo das ordenadas é (0, 2).

A equação da reta é:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & x & 5 \\ 0 & 2 & y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$(10 + 0 + 0) - (0 + 2x + 5y) = 0 \Rightarrow 10 - 2x - 5y = 0$

Forma geral: $2x + 5y - 10 = 0$

Forma reduzida: $5y = -2x + 10 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 2$

Registro de dúvidas e comentários

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

TEMAS

1. Progressões aritméticas
2. Progressões geométricas

Introdução

As progressões estão presentes em muitas situações, desde problemas de economia pessoal até descobertas científicas.

Imagine o caso de um jovem trabalhador que estabeleceu um plano de poupança para fazer uma viagem de estudos. Suponha que ele deposite mensalmente uma quantia e aumente o valor do depósito a cada mês, do seguinte modo: deposita R$ 100,00 no primeiro mês, R$ 110,00 no segundo mês, e vai acrescentando R$ 10,00 reais à quantia depositada no mês anterior, fazendo isso regularmente por 24 meses. Se você aprender como trabalhar com progressões, saberá, por exemplo, quanto deve ser depositado em determinado mês, ou a quantia acumulada ao fim de dois anos de poupança.

Também nas Ciências as progressões são úteis. Algumas descobertas importantes da Astronomia só foram possíveis graças à observação dos astrônomos das regularidades na sequência de períodos de tempo observados e registrados. Foi o que aconteceu com a descoberta do cometa Halley, por exemplo, assunto que você verá nesta Unidade, na seção *Pense sobre...*

Progressões aritméticas TEMA 1

Agora que você já tem alguma noção sobre sequências (assunto abordado na Unidade 1), estudará neste tema, de modo mais aprofundado, a **progressão aritmética (PA)**, que é um dos dois tipos especiais de sequências tratadas nesta Unidade.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Desde o início de seus estudos, você tem contato com sequências que apresentam alguma regularidade aditiva. Você se lembra de algum assunto da Matemática em que aparece essa característica?

As sequências e as progressões

Algumas progressões são muito simples, e você já as conhece do estudo das primeiras tabuadas, como é o caso da sequência dos números pares positivos:

$$(2, 4, 6, 8, ..., a_{10}, a_{11}, ..., a_n, ...)$$

Assim, não é difícil determinar o valor numérico do 5º termo.

Considerando que a diferença entre dois termos consecutivos da sequência é 2 e que $a_4 = 8$, pode-se concluir que $a_5 = 8 + 2 = 10$.

Pelo mesmo motivo, sabe-se que $a_{11} = a_{10} + 2$. O problema nesse caso é que ainda não se conhece o valor de a_{10}, pois, pela regra anterior, ele depende do termo antecedente a_9, que por enquanto também é desconhecido.

No entanto, é possível observar outros padrões e determinar o valor numérico de um termo qualquer em função da posição que ele ocupa na sequência.

Observe:

$a_1 = 2 \Rightarrow$ dado que é uma sequência dos pares positivos (o zero não é positivo nem negativo)

$a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4 = \mathbf{2} \cdot 2$

$a_3 = a_2 + 2 = 4 + 2 = 6 = \mathbf{2} \cdot 3$

$a_4 = a_3 + 2 = 6 + 2 = 8 = \mathbf{2} \cdot 4$

$a_5 = a_4 + 2 = 8 + 2 = 10 = \mathbf{2} \cdot 5$

Com base nessa regularidade, é possível calcular outros termos.

$a_{10} = a_9 + 2$, mas também pode ser calculado em função de sua posição na sequência (décima):

$a_{10} = \mathbf{2} \cdot 10 = 20$

$a_{11} = \mathbf{2} \cdot 11 = 22$

...

$a_{111} = \mathbf{2} \cdot 111 = 222$

Generalizando, pode-se dizer que um termo qualquer $\mathbf{a_n}$ pode ser determinado em função de sua posição; em outras palavras: o enésimo termo da sequência é:

$$\mathbf{a_n = 2n}$$

LEMBRE!

Enésimo é o termo que está na posição **n**.

Quando se sabe a lei geral de uma sequência, fica fácil resolver problemas do tipo.

- Calcular o valor numérico do 30º termo:

$$a_{30} = \mathbf{2} \cdot 30 = 60$$

- Determinar a posição do termo cujo valor numérico é 100:

Nesse caso, o que se quer descobrir é o valor de **n**, sabendo que $a_n = 100$.

A lei geral do enésimo termo é $a_n = 2n$, portanto, basta resolver a equação $2n = 100 \Rightarrow n = 50$, ou seja, o termo cujo valor numérico é 100 é o que está na 50ª posição da sequência dos números pares positivos.

Agora considere outras sequências simples como a dos números ímpares positivos e a sequência dos múltiplos de 3 maiores que zero:

(1, 3, 5, 7, ...)

(3, 6, 9, 12, ...)

O que essas sequências têm em comum com a sequência dos números pares?

Para responder, acompanhe a comparação, de duas em duas:

Pares positivos → $(2, 4, 6, 8, ..., a_n)$

Ímpares positivos → $(1, 3, 5, 7, ..., a_n)$

Semelhança: a diferença entre dois termos consecutivos é 2.

Diferença: cada uma das sequências tem um primeiro termo diferente.

Agora observe a comparação da sequência dos números pares com a sequência dos múltiplos positivos de 3:

Pares positivos → $(2, 4, 6, 8, ..., a_n)$

Múltiplos de 3 → $(3, 6, 9, 12, ..., a_n)$

Note que, nas duas sequências, a diferença entre dois termos consecutivos é constante, porém diferente em cada sequência.

Na sequência dos números pares, a diferença entre dois termos consecutivos é $a_n - a_{n-1} = \mathbf{2}$.

Na sequência dos múltiplos de 3, essa diferença é $a_n - a_{n-1} = \mathbf{3}$.

As sequências cuja diferença entre dois termos consecutivos é constante são chamadas de **progressão aritmética**. Também conhecidas como **PA**, sendo sua constante denominada **razão da PA**.

Uma PA fica bem determinada quando se conhece seu **primeiro termo** (a_1) e sua **razão** (**r**). Com esses elementos, é possível calcular o valor numérico de qualquer termo em função de sua posição (**n**) na progressão.

Pares positivos → $(2, 4, 6, 8, ..., a_n, ...)$

Primeiro termo: $a_1 = 2$

Razão: $r = 2$

Ímpares positivos → $(1, 3, 5, 7, ..., a_n, ...)$

Primeiro termo: $a_1 = 1$

Razão: $r = 2$

Múltiplos de 3 → $(3, 6, 9, 12, ..., a_n, ...)$

Primeiro termo: $a_1 = 3$

Razão: $r = 3$

Antes de aplicar essas ideias e técnicas, acompanhe o estudo da progressão aritmética a seguir, cujos quatro primeiros termos são conhecidos:

$(2, 5, 8, 11, ...)$

Primeiro termo: $a_1 = 2$

Razão: $r = 3$

Para determinar a razão de uma PA, basta calcular a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer e que sejam conhecidos:

$r = a_n - a_{n-1}$

$r = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

$r = 11 - 8 = 8 - 5 = 5 - 2 = 3$

Com base nesses dados, é simples determinar o valor do 5º termo:

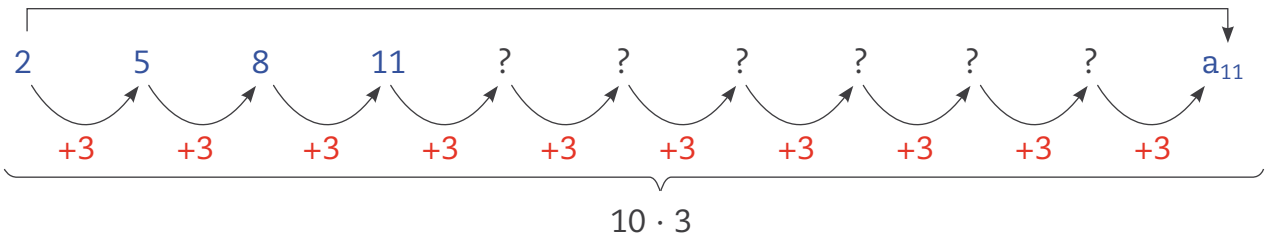
$$a_5 = a_4 + 3 \Rightarrow 11 + 3 = 14$$

Também é possível determinar o 11º termo, mas, para isso, seria necessário conhecer o valor numérico do 10º termo, e, para achar o valor do 10º termo, depende-se do valor do 9º termo, e assim por diante.

Mas existe um caminho mais curto e engenhoso para encontrar o valor do 11º termo.

2	5	8	11	?	?	?	?	?	?	?
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}

Lembre-se de que a razão é r = 3.



O que se procura saber é quantas vezes é preciso somar a razão r = 3 para ir do 1º termo até o 11º (a_{11}). Para responder, observe o que acontece com os quatro termos conhecidos:

$a_2 = a_1 + r = a_1 + 1 \cdot 3 = 2 + 3 = 5$

$a_3 = a_1 + 2r = a_1 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$

$a_4 = a_1 + 3r = a_1 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11$

Para calcular a_5, basta somar ao primeiro termo 4 vezes a razão:

$a_5 = a_1 + 4r$

$a_5 = 2 + 4 \cdot 3 = 2 + 12 = 14$

Para determinar o valor numérico do 5º termo, soma-se 4 vezes (5 – 1 = 4) a razão.

Portanto, para ir de a_1 até a_{11}, soma-se 10 vezes a razão:

$a_{11} = a_1 + 10r$

$a_{11} = 2 + 10 \cdot 3 = 2 + 30 = 32$

Pratique determinando o valor de todos os termos até o 11º.

Para calcular o *enésimo* termo de uma PA, usa-se uma fórmula derivada do raciocínio descrito anteriormente.

Fórmula do termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Observe a aplicação dessa fórmula para resolver outros problemas relativos à mesma sequência:

- calcular o valor de $\mathbf{a_{20}}$:

  $a_1 = 2$

  $r = 3$

  $n = 20$

  $a_{20} = ?$

  Basta substituir na fórmula:

  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

  $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

  $a_{20} = 2 + (20 - 1) \cdot 3 = 2 + 19 \cdot 3 = 2 + 57 = 59$

  $\mathbf{a_{20} = 59}$

- determinar a posição **n** do termo cujo valor numérico é $a_n = 65$:

  $a_1 = 2$

  $r = 3$

  $n = ?$

  $a_n = 65$

  Substituindo na fórmula, tem-se:

  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

  $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

  $65 = 2 + (n - 1) \cdot 3$

  $65 = 2 + (n - 1) \cdot 3$

  Eliminam-se os parênteses aplicando a propriedade distributiva:

  $65 = 2 + 3n - 3$

  $65 = 3n - 1$

  $65 + 1 = 3n$

  $66 = 3n$

  $66 \div 3 = n$

  $\mathbf{n = 22}$

ATIVIDADE 1 Progressões aritméticas

1 O termo geral de uma PA é dado por $a_n = 2n - 1$. Então, o 3º termo da PA vale:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

2 Determine o número de termos de uma PA cujo 1º termo é 1,5 e o último termo é 31,5, e cuja razão é 1,5.

3 O número de múltiplos de 11 entre 100 e 1.000 é:

a) 11

b) 81

c) 91

d) 100

e) 111

4 A razão de uma PA, na qual $a_3 + a_5 = 20$ e $a_4 + a_7 = 29$, vale:

a) 3

b) 5

c) 7

d) 9

e) 11

5 A quantidade de números compreendidos entre 1 e 2.101, que são divisíveis por 3 e 7, é:

a) 98

b) 99

c) 100

d) 101

e) 102

6 Três números estão em PA, e o maior deles é o triplo do menor. Sabendo-se que a soma dos três é 18, o termo do meio vale:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 9

e) 10

7 Assinale a alternativa em que a sequência corresponde às medidas dos lados de um triângulo retângulo, sabendo que elas formam uma PA cuja razão é 3.

a) 3, 6, 9

b) 6, 9, 12

c) 12, 15, 18

d) 9, 12, 15

e) n.d.a.



DESAFIO

A ANATEL determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2 MHz entre emissoras com frequências vizinhas. A cada emissora, identificada por sua frequência, é associado um canal, que é um número natural que começa em 200. Desta forma, à emissora cuja frequência é de 87,9 MHz corresponde o canal 200; à seguinte, cuja frequência é de 88,1 MHz, corresponde o canal 201, e assim por diante. Pergunta-se:

a) Quantas emissoras FM podem funcionar [na mesma região], respeitando-se o intervalo de frequências permitido pela ANATEL? Qual o número do canal com maior frequência?

b) Os canais 200 e 285 são reservados para uso exclusivo das rádios comunitárias. Qual a frequência do canal 285, supondo que todas as frequências possíveis são utilizadas?

Unicamp 2005. Disponível em: <http://www.comvest.unicamp.br/vest2005/F1/provaf1.pdf>. Acesso em: 26 set. 2014.

PENSE SOBRE...

A descoberta do cometa Halley e a PA

As progressões aritméticas são muito importantes no estudo de fenômenos periódicos. No século XVII, o astrônomo inglês Edmond Halley (1656-1742) analisou as características de cometas observados em 1531, 1607 e 1682, quando se deu conta de que, além de a descrição desses cometas serem muito semelhantes, havia um padrão na sequência das datas em que tinham sido vistos. Halley concluiu que, na verdade, não se tratava de três cometas diferentes, mas sim de um mesmo cometa que passava perto da Terra a cada 76 anos e, portanto, deveria voltar e ser observado próximo do ano 1758, o que realmente ocorreu na noite de 25 de dezembro daquele ano.

As datas do aparecimento do cometa formavam uma sequência muito parecida com uma progressão aritmética (1531, 1607, 1682, ...).

Halley observou que 1607 – 1531 = 76 e que 1682 – 1607 = 75. Pesquisou outros registros de cometas e as datas em que foram vistos. A partir daí, formulou a hipótese de que o cometa, que hoje leva seu nome, passa próximo da Terra a cada 75 anos e alguns meses, o que veio a se confirmar mais tarde, com a invenção de instrumentos de observação mais precisos.

O cometa Halley passou pela Terra em 1910 e 1986. Descubra para qual ano está prevista a sua volta.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Progressões aritméticas

1 Alternativa correta: **d**.

$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

2 n = ?

$a_1 = 1{,}5$

$a_n = 31{,}5$

$r = 1{,}5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 31{,}5 = 1{,}5 + (n - 1) \cdot 1{,}5 \Rightarrow 31{,}5 - 1{,}5 = (n - 1) \cdot 1{,}5 \Rightarrow 30 = (n - 1) \cdot 1{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 30 \div 1{,}5 \Rightarrow n - 1 = 20 \Rightarrow n = 21$

A PA tem 21 termos.

3 Alternativa correta: **b**. O primeiro múltiplo de 11 maior que 100 é 110, e o último múltiplo de 11 menor que 1.000 é 990. Portanto, pode-se considerar $a_1 = 110$, $a_n = 990$ e razão $r = 11$. Para encontrar **n**, basta substituir na fórmula do termo geral:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$990 = 110 + (n - 1) \cdot 11$

$11(n - 1) = 990 - 110 \Rightarrow 11(n - 1) = 880 \Rightarrow (n - 1) = 880 \div 11 \Rightarrow (n - 1) = 80 \Rightarrow n = 80 + 1 = 81$

Existem 81 múltiplos de 11 entre 100 e 1.000.

4 Alternativa correta: **a**. Para encontrar a razão, equaciona-se cada condição:

$a_3 = a_1 + 2r$; $a_4 = a_1 + 3r$; $a_5 = a_1 + 4r$; $a_7 = a_1 + 6r$

Substituindo nas igualdades $a_3 + a_5 = 20$ e $a_4 + a_7 = 29$ que aparecem no enunciado, tem-se:

$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 20$

$a_1 + 3r + a_1 + 6r = 29$

Resolve-se o sistema de duas equações e duas incógnitas (a_1 e r):

$2a_1 + 6r = 20$

$2a_1 + 9r = 29$

Subtraindo as duas equações, encontra-se:

$(2a_1 + 9r) - (2a_1 + 6r) = (2a_1 - 2a_1) + (9r - 6r) = 29 - 20$

$3r = 9 \Rightarrow r = 3$

5 Alternativa correta: **c**.

É preciso lembrar que um número que é divisível por 3 e por 7 é divisível por 21.

O primeiro número que satisfaz essa condição no intervalo é 21; o último é 2.100.

Logo, $a_1 = 21$, $a_n = 2.100$, e a razão é 21. Basta substituir na fórmula do termo geral e resolver a equação em **n**:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 2.100 = 21 + (n - 1) \cdot 21 \Rightarrow (n - 1) \cdot 21 = 2.100 - 21 \Rightarrow n - 1 = (2.100 - 21) \div 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 2.100 \div 21 - 21 \div 21 \Rightarrow n - 1 = 100 - 1 \Rightarrow n - 1 = 99 \Rightarrow n = 99 + 1 = 100$

Existem 100 números divisíveis por 3 e 7 entre 1 e 2.101.

6 Alternativa correta: **b**. Se (a_1, a_2, a_3) formam uma PA, então eles podem ser escritos, respectivamente, como: (x – r, x, x + r).

$a_1 + a_2 + a_3 = 18 \Rightarrow x - r + x + x + r = 18 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

Independentemente do valor da razão, nessas condições, o termo do meio vale 6.

7 Alternativa correta: **d**. Se as medidas dos lados estão em PA, pode-se escrever a sequência $(x - 3, x, x + 3)$.

Usando o teorema de Pitágoras ($h^2 = a^2 + b^2$) e resolvendo a equação, tem-se:

$(x + 3)^2 = x^2 + (x - 3)^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + x^2 - 6x + 9 \Rightarrow -x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 12$.

$x \neq 0$, pois a medida do lado de um triângulo tem de ser um número maior que 0 (zero), portanto $x = 12$, e os lados do triângulo são (9, 12, 15).

Esse resultado satisfaz o teorema de Pitágoras:

$15^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow 225 = 144 + 81$

Desafio

a) Podem funcionar 101 emissoras, e a que apresenta maior frequência é o canal de número 300, pois:

i. (87,9; 88,1; ...; 107,9) é uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 87,9$ e razão $r = 0,2$.

Assim, $107,9 = 87,9 + (n - 1) \cdot 0,2 \Rightarrow n - 1 =$ 101. Logo, essa sequência tem 101 termos.

ii. A sequência (200, 201, 202, ...) é uma progressão aritmética de primeiro termo 200, razão $r = 1$.

$a_{101} = 200 + (n - 1) \cdot 1 \Rightarrow a_{101} = 200 + (101 - 1) \cdot 1 \Rightarrow a_{101} = 200 + 100 \Rightarrow a_{101} = 300$

Assim, a 101ª emissora é a do canal 300.

b) A frequência do canal 285 é o 86º termo da progressão aritmética das frequências.

Vejam: (200, 201, 202, ..., 285), quantos termos existem?

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 285 = 200 + (n - 1) \cdot 1 \Rightarrow 285 - 199 = n \Rightarrow n = 86$

e, portanto:

$a_{86} = a_1 + 85 \cdot r \Rightarrow a_{86} = 87,9 + 85 \cdot 0,2 \Rightarrow a_{86} = 104,9$

Logo, a frequência que ocupa a 86ª posição é 104,9.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

Como você viu no caso da PA, as sequências apresentam uma regularidade, porém algumas delas têm como característica uma regularidade multiplicativa e, consequentemente, crescem mais rápido que uma progressão aritmética. Esse tipo de comportamento aparece, por exemplo, em determinadas aplicações em que incidem juros sobre juros, propagação de epidemia de vírus, divisões em partituras musicais, entre outras aplicações.

Neste tema, você vai estudar e se aprofundar na **progressão geométrica (PG)**, um tipo especial de sequência.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já deve ter ouvido falar que as coisas se desvalorizam com o uso, não é? Já pensou como é determinado o valor de cada objeto diante dessa desvalorização?

Progressão geométrica – início de conversa

No livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan (1938), há uma passagem que conta a história do xadrez, conhecida como Lenda de Sessa. Diz a lenda que o jogo de xadrez foi inventado para divertir um rei, que, encantado com o jogo, pediu a seu criador, Sessa, que escolhesse uma recompensa em ouro e joias.

Sessa, muito humildemente, pediu apenas para ser pago em trigo, deixando todos perplexos e zombando do ingênuo inventor. Mas ele prosseguiu, e pediu ao rei que lhe pagasse 1 grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, 2 grãos para a segunda casa, 4 para a terceira, 8 para a quarta, e assim por diante, dobrando o número de grãos para cada casa sucessiva do tabuleiro.

O rei sorriu ao ouvir o que acreditou ser um pedido modesto. Mas seu sorriso desapareceu na manhã seguinte quando ouviu de seu secretário de Finanças, um contador muito habilidoso, que ele, o rei, teria de pagar uma quantidade de trigo que não existia no reino, nem provavelmente no mundo todo.

A explicação é simples: ao dobrar a quantidade de grãos de trigo em cada casa, obtém-se uma sequência que cresce muito rapidamente à medida que se avança pelas casas do tabuleiro, formando uma sequência que, até a 10ª casa, tem os seguintes valores numéricos:

$$(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...)$$

Isso quer dizer que a soma de todos os grãos dá um número que ultrapassa a casa dos quinquilhões:

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... + 2^{63} = 2^{64} - 1 \text{ grãos}$$

Esse número é quase impronunciável: **18.446.744.073.709.551.615** grãos de trigo.

A sequência (1, 2, 4, 8, 16, ...) tem uma regularidade: cada termo a partir do 1º é igual ao anterior multiplicado por um valor constante, que no caso é 2. Qualquer sequência com essa característica é chamada de **progressão geométrica (PG)**, e, tal como visto no estudo das progressões aritméticas, as PGs também têm uma fórmula do termo geral.

As PGs aparecem em uma variedade de situações do dia a dia, por exemplo, para descrever o rendimento de uma aplicação financeira a juros fixos ou para determinar a desvalorização de determinado bem.

Elas também são utilizadas por geógrafos e biólogos na previsão e estimativa de populações (de pessoas ou bactérias) que crescem ou decrescem a uma taxa fixa.

Fórmula do termo geral da PG

Para deduzir a fórmula do termo geral de uma PG, acompanhe o estudo desta sequência: $(3, 6, 12, 24, 48, ..., a_n)$.

Observe sua regularidade: cada termo, a partir do 2º, é igual ao anterior multiplicado por 2.

$a_1 = 3$

$a_2 = 3 \cdot \mathbf{2} = 6$

$a_3 = 6 \cdot \mathbf{2} = 12$

$a_4 = 12 \cdot \mathbf{2} = 24$

$a_5 = 24 \cdot \mathbf{2} = 48$

Nessa sequência, a constante 2, usada para multiplicar um termo a fim de obter o seguinte, é chamada de razão da PG. Para evitar confusão com a razão utilizada nas progressões aritméticas, os matemáticos empregam a letra **q** (de quociente) para indicá-la, pois, dividindo um termo qualquer pelo anterior, obtém-se sempre um valor constante: a razão da PG.

Verifique:

$a_2 \div a_1 = 6 \div 3 = 2$

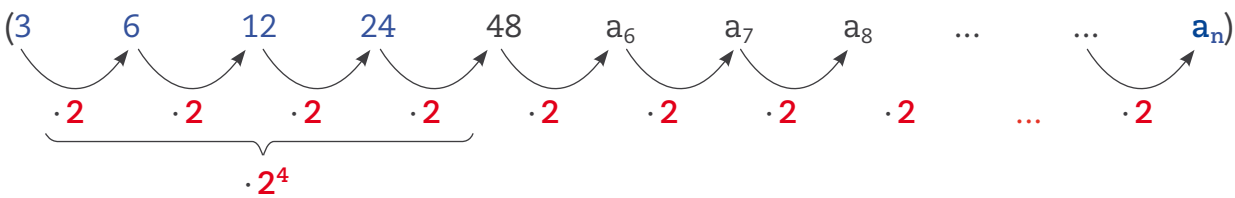
$a_3 \div a_2 = 12 \div 6 = 2$

$a_4 \div a_3 = 24 \div 12 = 2$

$a_5 \div a_4 = 48 \div 24 = 2$

Para saber o valor do 6º termo, basta calcular $a_6 = a_5 \cdot 2$, e, como $a_5 = 48$, então $a_6 = 48 \cdot 2 = 96$.

Agora observe a estrutura do 5º termo da PG. Lembre-se de que a razão q = 2.



$a_5 = 48$

$a_5 = 24 \cdot 2 = a_4 \cdot \mathbf{2}$

$a_5 = 12 \cdot 2 \cdot 2 = a_3 \cdot \mathbf{2^2}$

$a_5 = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = a_2 \cdot \mathbf{2^3}$

$a_5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = a_1 \cdot \mathbf{2^4}$

Portanto, $a_6 = a_1 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$

Com base na percepção dessa regularidade, pode-se determinar o valor do 10º termo conhecendo o 1º e a razão:

$a_{10} = a_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = a_1 \cdot 2^9$

$a_{10} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1.536$

Agora, pode-se generalizar e expressar.

Fórmula do termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Observe sua utilização na resolução dos seguintes problemas.

- Como determinar o 8º termo da PG (2, 6, 18, ..., a_n)?

São conhecidos o primeiro termo ($a_1 = 2$); a razão, que é o quociente entre um termo e seu antecessor ($q = a_2 \div a_1 = a_3 \div a_2 = ... = 3$); e o valor de **n** ($n = 8$).

Substituindo na fórmula do termo geral, tem-se:

$a_8 = a_1 \cdot q^{8-1}$

$a_8 = 2 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2.187 = 4.374$

A PG é (2, 6, 18, 54, 162, 486, 1.458, 4.374, ..., a_n).

- Como determinar o 1º termo de uma PG de razão $q = 5$ em que o 4º termo $a_4 = 750$?

São conhecidos a razão $q = 5$, $n = 4$ e $a_4 = 750$.

Substituindo na fórmula do termo geral, obtém-se:

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$

$750 = a_1 \cdot 5^3 = a_1 \cdot 125 \Rightarrow a_1 = 750 \div 125 = 6$

A PG é (6, 30, 150, 750, ..., a_n).

- Qual é a razão de uma PG em que o 1º termo é 5 e o 6º termo é 5.120?

São conhecidos $a_1 = 5$, $a_6 = 5.120$ e o número de termos $n = 6$.

Substituindo na fórmula, obtém-se:

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$

$a_6 = a_1 \cdot q^5$

$5.120 = 5 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = 5.120 \div 5 = 1.024$

Fatorando 1.024, obtém-se: $1.024 = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$.

$q^5 = 4^5 \Rightarrow q = 4$

A PG é (5, 20, 80, 320, 1.280, 5.120, ..., a_n).

ATIVIDADE 1 Progressões geométricas

1 Se a_1, a_2, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, a_5, a_6, a_7, a_8 formam, nessa ordem, uma PG, então os valores de a_1 e a_8 são, respectivamente:

a) $\frac{1}{8}$ e 16

b) $\frac{1}{16}$ e 8

c) $\frac{1}{4}$ e 4

d) $\frac{1}{16}$ e 2

e) $\frac{1}{16}$ e $\frac{1}{8}$

2 Sabendo que o 3º termo de uma PG é 1 e o 5º é 9, então o 1º termo é:

a) $\frac{1}{27}$

b) $\frac{1}{9}$

c) $\frac{1}{3}$

d) 1

e) 0

3 Numa PG de termos positivos, o 1º termo é igual à razão, e o 2º termo é 3. O 8º termo da progressão é:

a) 81

b) 3^7

c) $27\sqrt{3}$

d) $\sqrt{273}$

e) 333

4 O número de bactérias em um experimento duplica de hora em hora. Se, inicialmente, existem 8 bactérias, ao fim de 10 horas o número de bactérias será:

a) 2^4

b) 2^7

c) 2^{10}

d) 2^{13}

e) 2^{15}

5 As medidas dos ângulos internos de um triângulo estão em PG de razão 2. Então, a soma desses ângulos é:

a) 72°

b) 90°

c) 180°

d) 270°

e) 360°

DICA!

Resolver esse exercício o ajudará na resolução do exercício 6.

6 As medidas dos ângulos de um triângulo estão em PG de razão 2. Então, o triângulo:

a) tem um ângulo de 60°.

b) é retângulo.

c) é acutângulo.

d) é obtusângulo.

e) é isósceles.

7 A soma dos **n** primeiros termos da sequência (1, –1, 1, –1, ...) é:

a) 0

b) 0 quando **n** é par; 1 quando **n** é ímpar.

c) 1

d) n

e) –n

8 Em determinada progressão geométrica, a razão é maior que 1 e o 1º termo é menor que 0 (zero). Pode-se dizer que essa PG é:

a) decrescente.

b) crescente.

c) constante.

d) oscilante.

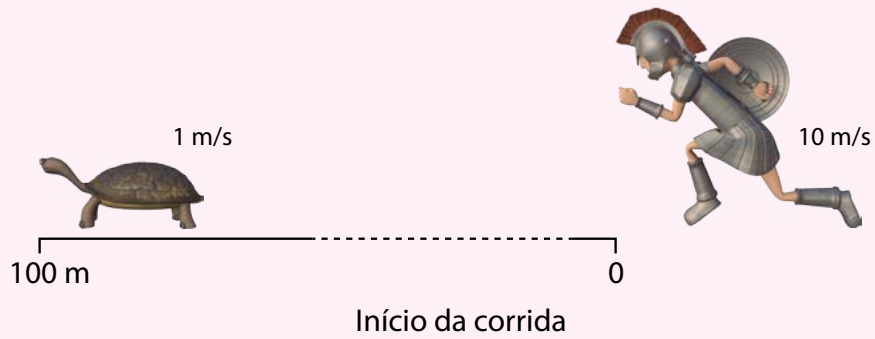
PARA SABER MAIS

Progressão geométrica, Aquiles e a tartaruga

O infinito sempre intrigou os pensadores de todas as épocas.

A confusão causada pelo conceito de infinito deve-se a muitos fatores. Pode-se pensar: em um conjunto com um número infinito de elementos; nos infinitos pontos de um segmento de reta de 1 cm; nas infinitas possibilidades de representar um número racional; nas infinitas casas decimais de um número irracional como π ou $\sqrt{2}$; no tempo infinito e no tamanho do Universo, que, para alguns, é infinito.

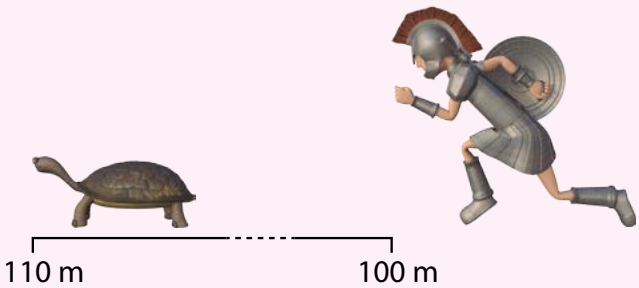
Qualquer que fosse a noção de infinito dos pensadores da Antiguidade, eles se depararam com dilemas de natureza filosófica.

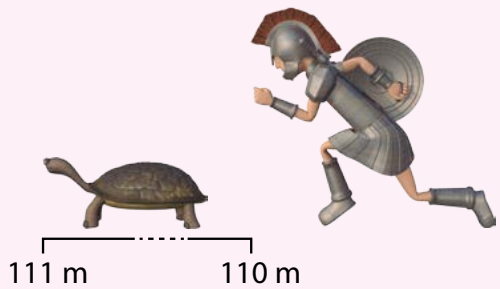


© Daniel Beneventi

Um dos mais interessantes problemas que levaram os filósofos gregos a arrancar os pelos de suas barbas foi proposto no século V a.C. pelo filósofo Zenão de Eleia (aprox. 490-430 a.C.).

Zenão formulou uma proposição que continha uma contradição aparente, relatando uma corrida fictícia entre Aquiles, o lendário atleta e guerreiro grego, e uma tartaruga. O curioso nessa história é que, apesar de ser mais veloz que a tartaruga, Aquiles jamais conseguia ultrapassá-la quando ela partia à sua frente.





Suponha que, no início da corrida, a tartaruga partiu com uma vantagem de 100 m à frente de Aquiles, e que as velocidades dos concorrentes eram 10 m/s (Aquiles) e 1 m/s (tartaruga). Passados 10 segundos, Aquiles atingiu o ponto de onde a tartaruga partiu, mas, durante esse tempo, a tartaruga avançou 10 m. Para atingir esse segundo ponto, Aquiles demorou 1 segundo, mas, nesse segundo, a tartaruga conseguiu avançar mais 1 m. Aquiles já estava ficando impaciente, pois, para atingir esse último ponto, precisava de 0,1 segundo, quando então a tartaruga teria avançado mais 0,1 m (10 cm), e assim sucessivamente.

Em cada etapa percorrida, a distância entre eles foi diminuindo de acordo com o fator 0,1. Esse processo se manteve até o infinito.

Para resolver essa questão, os matemáticos imaginaram uma sequência do tipo PG decrescente, cuja razão era $q = \frac{1}{10}$, em que $a_1 = 100$ correspondia à distância percorrida pela tartaruga no primeiro intervalo.

Posições de Aquiles e da tartaruga	
Aquiles	**Tartaruga**
0 m	100 m
100 m	110 m
110 m	111 m
111 m	111,1 m

← Partida

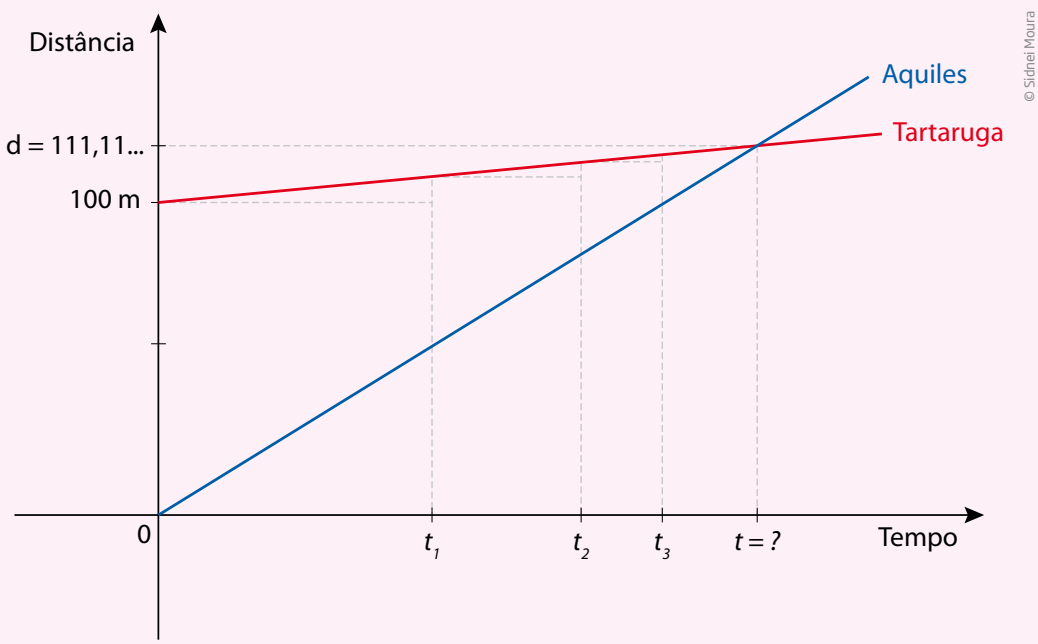
Lembre-se de que a tartaruga partiu 100 m à frente de Aquiles, e que Aquiles é 10 vezes mais rápido, pois suas velocidades são 10 m/s (Aquiles) e 1 m/s (tartaruga).

Para alcançar a tartaruga, Aquiles deveria percorrer a distância S:

$$S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = 111{,}11\ldots$$

Observe que as parcelas dessa soma formam uma PG.

Ainda que o raciocínio possa levar a crer que Aquiles nunca ultrapassou a tartaruga, o gráfico sugere que isso ocorrerá em algum momento.



Trata-se de um paradoxo, ou seja, um raciocínio que envolve uma contradição e que ora parece verdadeira, ora parece falsa.

Atividade 1 – Progressões geométricas

1 Alternativa correta: **b**.

$a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{2}$

$q = a_4 \div a_3 = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$

$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot 2^2 = 4a_1$

$4a_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{16}$

Calcule a_8:

$a_8 = a_1 \cdot q^7 = \frac{1}{16} \cdot 2^7 = \frac{1}{2^4} \cdot 2^7 = 2^3 = 8$

2 Alternativa correta: **b**.

$a_3 = 1$, $a_5 = 9$

$a_5 = a_3 \cdot q^2$

$9 = 1 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$

Tanto 3 como –3 podem ser considerados razão da PG. Se $q = 3$, a sequência será $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \ldots\right)$. Se $q = -3$, a sequência será: $\left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9\right)$. Neste segundo caso ($q = -3$), chamado de PG oscilante, os sinais dos termos se alternam, ora o sinal é positivo, ora é negativo. Logo, se $a_3 = 1$, então $a_2 = -\frac{1}{3}$ e $a_1 = \frac{1}{9}$.

3 Alternativa correta: **a**.

$a_2 = a_1 \cdot q$; como $a_2 = 3$, logo:

$3 = q^2$, $q = \sqrt{3}$, por se tratar de uma PG de termos positivos, descarta-se $q = -\sqrt{3}$.

$a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow a_8 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^7} = (\sqrt{3})^8 = 3^4 = 81$

4 Alternativa correta: **d**. É como se fosse uma PG em que $a_1 = 8$ e $q = 2$.

Considerando que a_1 corresponde ao instante 0 (zero), ao final de 10 horas o número de bactérias corresponderá ao valor de a_{11} (há 10 intervalos entre 1 e 11):

$a_{11} = a_1 \cdot q^{11-1}$

$a_{11} = 8 \cdot 2^{10} = 2^3 \cdot 2^{10} = 2^{13}$

5 Alternativa correta: **c**. Essa é uma questão que tem a chamada "pegadinha", pois, não importa quais sejam os ângulos, a soma dos ângulos internos de um triângulo será sempre 180°.

Por outro lado, a PG que satisfaz essas relações angulares é: (x, 2x, 4x). Como $x + 2x + 4x = 180°$,

e como $180 \div 7 \cong 25{,}71$, a medida do ângulo menor está entre 25° e 26°, ou seja, não se tem um valor exato, e sim aproximado. Se x = 25, então a PG é (25, 50, 100); se x = 26, a PG é (26, 52, 104).

$25° + 50° + 100° = 175° < 180°$ e $26° + 52° + 104° = 182° > 180°$.

Isso ocorre porque você não está trabalhando com valores exatos, e sim com aproximações.

6 Alternativa correta: **d**. De acordo com o exercício anterior, o maior ângulo desse triângulo é um valor entre 100° e 104°, ou seja, maiores que 90°, portanto esse triângulo tem um ângulo obtuso. Trata-se de um triângulo obtusângulo.

7 Alternativa correta: **b**. Dividindo um termo qualquer por seu antecessor, descobre-se que a PG tem razão $q = -1$; os termos têm sinais alternados, o que os matemáticos chamam de PG oscilante (quando $q < 0$ e $a_1 \neq 0$).

Somando os seis primeiros termos, tem-se:

$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

Somando os sete primeiros termos, tem-se:

$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$

Ou seja, se o número de termos é par, a soma é 0; se o número de termos é ímpar, a soma é 1.

8 Alternativa correta: **a**. Como a razão é um número positivo e o 1º termo é negativo, o 2º termo será negativo; assim, todos os termos serão negativos. O valor em módulo dos termos aumenta, mas, por causa do sinal negativo, à medida que **n** cresce, decresce o valor de $\mathbf{a}_n$, ou seja, a PG é decrescente.

Veja no caso em que $a_1 = -2$ e razão $r = 3$ (– 2, – 6, – 18, ...).

DICA!

Quando for resolver exercícios desse tipo, faça o teste com números e decida a alternativa correta.

HORA DA CHECAGEM

Registro de dúvidas e comentários

Unidades de Medida

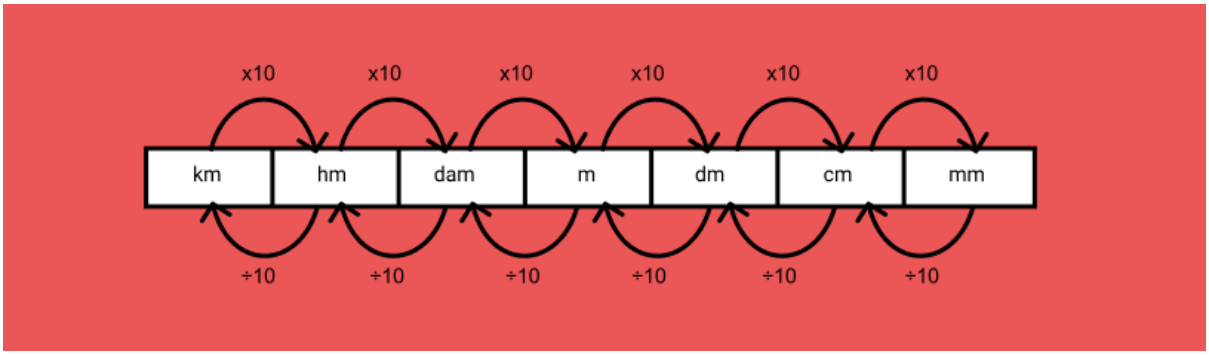
Unidades de medida são grandezas que compõem o sistema métrico decimal. Hoje, vamos rever algumas unidades de medida mais importantes para resolver problemas matemáticos. Além disso, vamos mostrar as conversões e, ainda, vamos resolver alguns exercícios para facilitar o entendimento por parte do aluno.

Às vezes, ao tentar resolver um exercício torna-se necessário por parte do aluno fazer uma conversão de uma unidade de medida para outra. Vamos mostrar os símbolos de cada uma, adotado por convenção no *Sistema Internacional* (SI).

GRANDEZA	NOME DA UNIDADE	SÍMBOLO (SI)
comprimento	metro	m
capacidade	litro	l
massa	quilograma	kg
superfície/área	metro quadrado	m^2
medidas agrárias	are	a
volume	metro cúbico	m^3
tempo	segundos	s

Medidas de comprimento

Comprimento é, talvez, a medida mais utilizada no cotidiano. Por isso, acredito que todos devem ter facilidades para entender essa grandeza e sua unidade de medida.



Medidas de Comprimento

Perceba pela imagem que para uma conversão para a direita é o mesmo que multiplicar por 10. Enquanto que para a esquerda é dividir por 10.

Dessa forma, podemos entender que para multiplicar por 10, basta deslocar a vírgula para a direita uma vez, que é a quantidade de zeros. Para dividir basta deslocar a vírgula para a esquerda uma vez, a quantidade de zeros.

Então se quisermos converter metro (m) em milímetro (mm), multiplicamos por 1000 (10 x 10 x 10), que é o mesmo que deslocar a vírgula três casas à direita. 1 metro tem 1000 milímetros. Se quisermos converter metros (m) em kilômetros (km), temos que dividir por 1000 (10 ÷ 10 ÷ 10), que é o mesmo que deslocar a vírgula três casas à esquerda. 1 metro equivale a 0,001 km.

A unidade de medida padrão: metro (m)

- *Quilômetros → 1 km = 1000 m*
- *Hectômetro → 1 hm = 100 m*
- *Decâmetro → 1 dam = 10 m*
- *Metro → 1 m = 1 m*
- *Decímetro → 1 dm = 0,1 m*
- *Centímetro → 1 cm = 0,01 m*
- *Milímetro → 1 mm = 0,001 m*

Exemplos:

- *Converter 10 **dam** em **cm:***
  - ***dam** → **m** → **dm** → **cm***
  - *10 **dam** = 10 **m** = 1.000 **dm** = 10.000 **cm***

    É o mesmo que deslocar a vírgula para a direita em três casas:

  - *10 **dam** = 10.000 **cm***
- *Converter 320 **dm** em **km:***
  - ***km** ← **hm** ← **dam** ← **m** ← **dm***

  *É o mesmo que deslocar a vírgula **quatro** casas à esquerda.*

  - *320 **dm** = 0,0320 **km***

Medidas de capacidade

A unidade padrão para essa grandeza é o **litro (*l*)**.

- *Quilolitro → 1 kl = 1000 l*
- *Hectolitro → 1 hl = 100 l*
- *Decalitro → 1 dal = 10 l*
- *Litro → 1 l = 1 l*
- *Decilitro → 1 dl = 0,1 l*
- *Centilitro → 1 cl = 0,01 l*
- *Mililitro → 1 ml = 0,001 l*

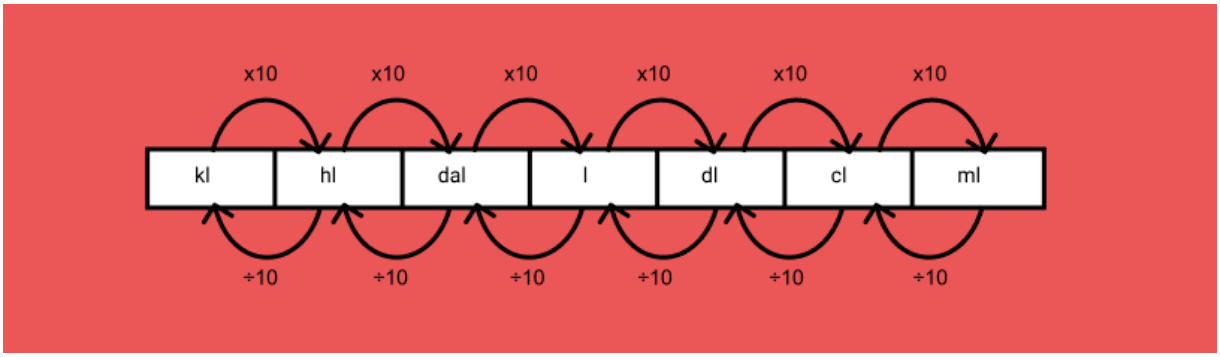
Exemplo:

- *Converter 20 **ml** em **dl***
  - ***dl** ← **cl** ← **ml***

    *Basta deslocar a vírgula **duas** casas decimais à esquerda.*

  - *20 **ml** = 0,20 **dl***

Pela imagem abaixo veja que converter é o mesmo que dividir por 10 para a esquerda ou multiplicar por 10 para a direita. Também pode se entender que essa multiplicação ou divisão é o mesmo que deslocar a vírgula uma vez de uma unidade para a outra.



Medidas de capacidade

Medidas de massa

A grandeza massa não é muito usual no dia a dia, mas muito comum quando nos deparamos com problemas de física. Unidade padrão: **quilograma (*kg*)**

- *Quilograma → 1 kg = 1000 g*
- *Hectograma → 1 hg = 100 g*
- *Decagrama → 1 dag = 10 g*
- *Grama → 1 g = 1 g*
- *Decigrama → 1 dg = 0,1 g*
- *Centigrama → 1 cg = 0,01 g*
- *Miligrama → 1 mg = 0,001 g*

Dizemos que 1.000 kg corresponde a 1 tonelada

- ***1 t = 1.000 kg***

Exemplos:

- *Converter 32 **g** em **hg:***
  - ***hg** ← **dag** ← **g***

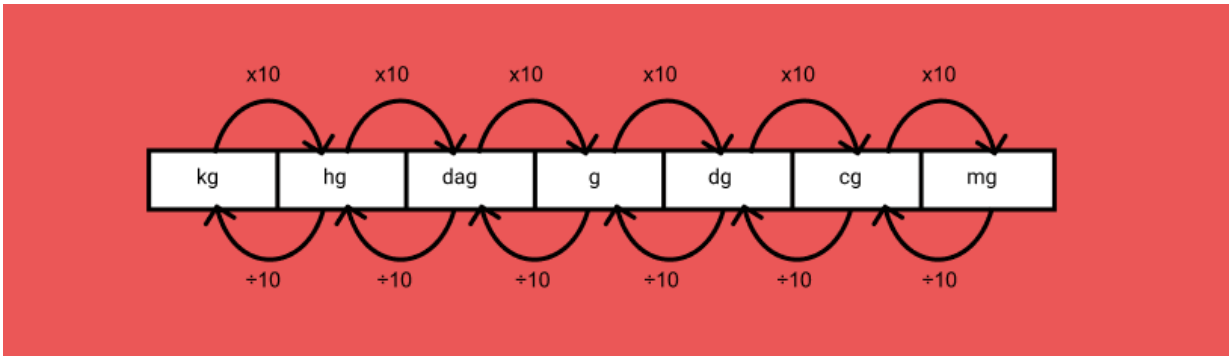
    *Deveremos deslocar a vírgula **duas** casas decimais para a esquerda.*

  - *32 **g** = 0,32 **hg***
- *Converter 782 **kg** em **toneladas:***

*Uma tonelada (**1t**) equivale a **1.000 kg**. Assim, devemos dividir a quantidade de **kg** por **1.000**, que é o mesmo que deslocar a vírgula **três** casas decimais à esquerda.*

Logo, 782 **kg** = **0,782t**

Estude a imagem para entender melhor.



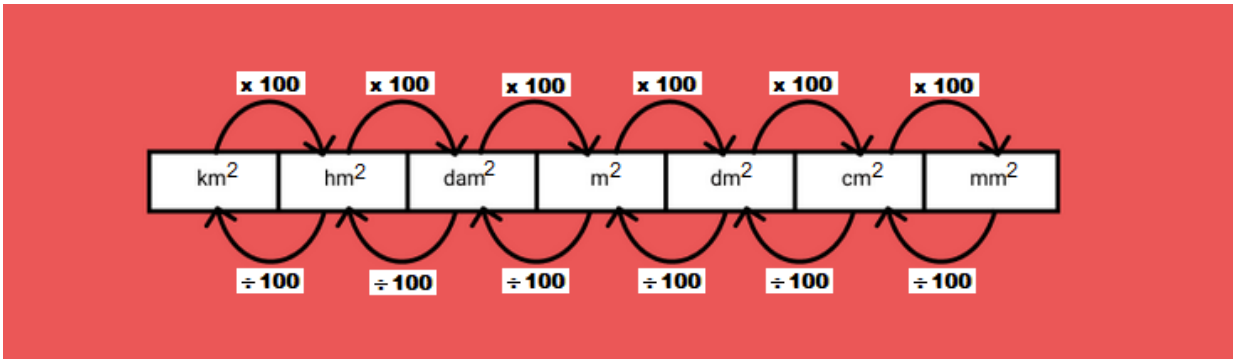
Medidas de Massa

Medidas de superfície ou área

Medidas de superfície ou área também estão presentes no nosso dia a dia. A unidade de medida padrão é: **metro quadrado (m²)**

- *1 km² → 1.000.000 m² =* 10^6 *m²*
- *1 hm² → 10.000 m² =* 10^4 *m²*
- *1 dam² → 100 m² =* 10^2 *m²*
- *m² → 1 m² = 1 m²*
- *1 dm² → 0,01 m² =* 10^{-2} *m²*
- *1 cm² → 0,0001 m² =* 10^{-4} *m²*
- *1 mm² → 0,000001 m² =* 10^{-6} *m²*

A imagem abaixo pode auxiliar no entendimento, da mesma maneira que nas '*medidas de comprimento*'.



Medidas de Área

Medidas agrárias

Os fazendeiros devem conhecer essa unidade de medida muito bem e, aqui, você também vai entender. A unidade de medida padrão é: **are (*a*)**

- *1 a = 1 dam²*
- *Hectare (ha) = 1 hm² (100 m x 100 m) ou (10m x 1000m) ou (1m x 10.000m) igual a 10.000m²*
- *Centiare (ca) = 1 m²*

Exemplos:

- *Converter 3,2 **hm²** em **m²:***
  - ***hm²** → **dam²** → **m²***
  - *3,2 **hm²** = 320 **dam²** = 32.000 **m²***

*É o mesmo que deslocar a vírgula **quatro** casas decimais à direita, pois as unidades são quadradas.*

- *Converter 48,6 **dm²** em **m²**:*
  - ***m²** ← **dm²***

    *Deveremos deslocar a vírgula **duas** casas decimais à esquerda.*

  - *48,6 **dm²** = 0,486 **m²***
- *Converter 21,7 **ha (hectare)** em **km²:***
  - *21,7 **ha** = 21,7 **hm²***
  - ***km²** ← **hm²***

    *Deveremos deslocar a vírgula **duas** casas decimais à esquerda.*

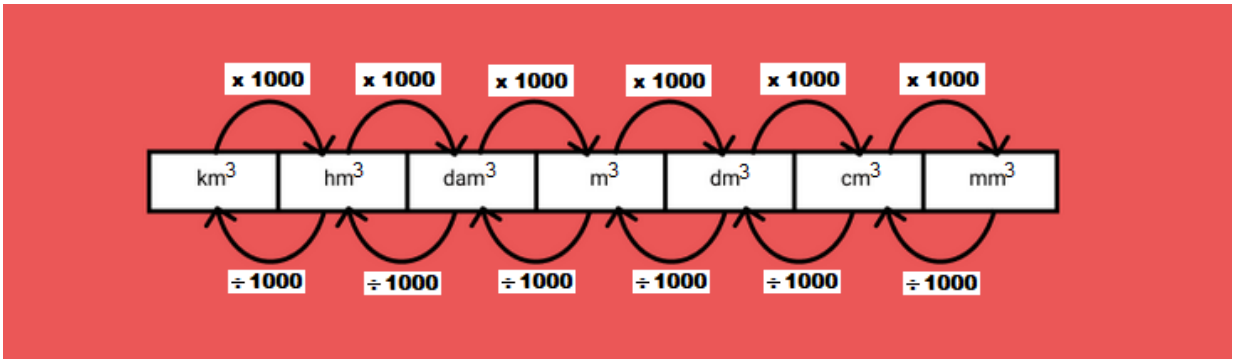
  - *21,7 **ha** = 21,7 **hm²** = 0,217 **km²***

Medidas de volume

Quem nunca quis saber quanto cabe em uma caixa d'água, por exemplo. Para essa grandeza utilizamos a unidade de media padrão: **metro cúbico (m^3)**

- *1 km^3 = 10^9 m^3*
- *1 hm^3 = 10^6 m^3*
- *1 dam^3 = 10^3 m^3*
- *m^3 → 1 m^3 = 1 m^3*
- *1 dm^3 = 10^{-3} m^3 (equivale a 1 litro)*
- *1 cm^3 = 10^{-6} m^3*
- *1 mm^3 = 10^{-9} m^3*

A imagem abaixo pode auxiliar no entendimento, da mesma maneira que nas '*medidas de comprimento*'.



Medidas de Volume

Exemplos:

- Converta 2.578 **mm^3** em **dm^3**:
  - **dm^3** ← **cm^3** ← **mm^3**
  - 2.578 **mm^3** = 2,578 **cm^3** = 0,002.578 **dm^3**

  Na prática, é o mesmo que deslocar a vírgula **três** casas decimais para esquerda.

- Converta 28,3 **m^3** em **dm^3**:
  - **m^3** → **dm^3**

  Deveremos deslocar a vírgula **três** casas decimais para a direita.

  - 28,3 **m^3** = 28.300 **dm^3**

Medidas de tempo

A unidade de medida de tempo é uma das mais importantes utilizadas na física e também no nosso dia a dia. No sistema internacional de medidas (SI), a medida de tempo é o segundo (s).

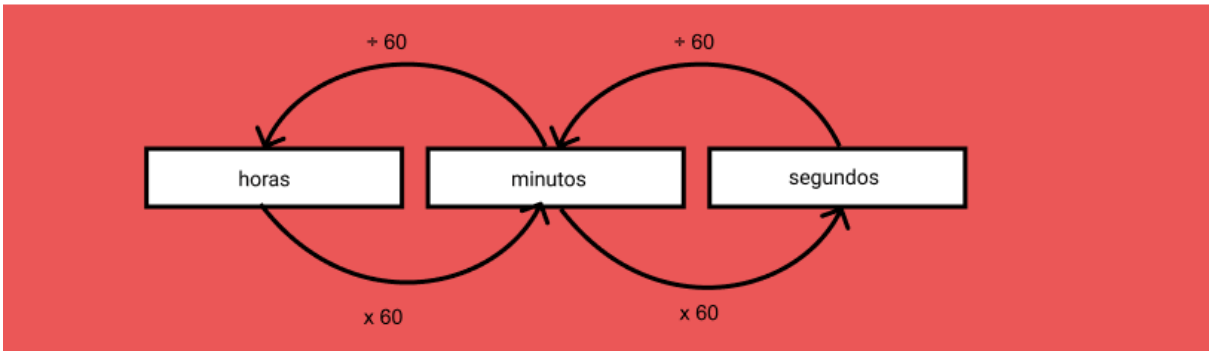
Dessa forma em muitos casos o aluno terá que saber converter de horas para segundos, de minutos para segundos ou vice-versa.

1 hora (h) = 3600 segundos (s)

1 minuto (min) = 60 segundos (s)

1 hora (h) = 60 minutos (min)

1 dia = 24 horas (h)



Conversão de medidas de tempo

Pela imagem percebemos que para converter de horas para minutos, horas para segundos e ao contrário também, basta multiplicar ou dividir por 60.

Exemplos:

- Converter 3 horas para segundos
    - 3 x 60 x 60 = 10800 segundos
- Converter 3 horas para minutos
    - 3 x 60 = 180 minutos
- Converter 3600 segundas para horas
    - 10800 ÷ 60 ÷ 60 = 3 horas
- Converter 180 minutos para horas
    - 180 ÷ 60 = 3 horas

Lista de Exercícios de Conversão de Unidades

1) Transforme:

a) 2 km em m

b) 1,5 m em mm

c) 5,8 km em cm

d) 0,4 m em mm

e) 27 mm em cm

f) 126 mm em m

g) 12 m em km

2) Agora converta as unidades de área:

a) 8,37 dm^2 em mm^2

b) 3,1416 m^2 em cm^2

c) 2,14 m^2 em mm^2

d) 125,8 m^2 em km^2

e) 12,9 km^2 em m^2

f) 15,3 m^2 em mm^2

3) Depois converta as de volume:

a) 8,132 km^3 em hm^3

b) 180 hm^3 em km^3

c) 1 m^3 em mm^3

d) 5 cm^3 em m^3

e) 78,5 m^3 em km^3

f) 12 m^3 em cm^3

g) 139 mm^3 em m^3

4) Converta em litros:

a) 3,5 dm^3

b) 5 m^3

c) 3400000 mm^3

d) 28 cm^3

e) 4,3 km^3

f) 13 dam^3

5) Expresse em metros cúbicos o valor da expressão:

$3540dm^3 + 340.000cm^3 =$

Gabarito

1 - **a)** 2000 m ; **b)** 1500 mm ; **c)** 580000 cm ; **d)** 400 mm ; **e)** 2,7 cm ; **f)** 0,126 m; **g)** 0,012 km
2 - **a)** 83700 mm^2 ; **b)** 31416 cm^2 ; **c)** 2140000 mm^2 ; **d)** 0,0001258 km^2 ; **e)** 12900000 m^2 ; **f)** 15300000 mm^2
3 - **a)** 8132 hm^3 ; **b)** 0,180 km^3 ; **c)** 1×10^9 mm^3 ; **d)** 5×10^{-6} m^3 ; **e)** $78,5 \times 10^{-9}$ km^3 ; **f)** 12×10^6 cm^3 ; **g)** 139×10^{-9} m^3
4 - **a)** 3,5 ℓ ; **b)** 5000 ℓ ; **c)** 3,4 ℓ ; **d)** 0,028 ℓ ; **e)** $4,3 \times 10^{12}$ ℓ ; **f)** 13000000 ℓ
5 - 3,88 m^3

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Matemática : caderno do estudante. São Paulo: Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI): Secretaria da Educação (SEE), 2014.

il. - - (Educação de Jovens e Adultos (EJA) : Mundo do Trabalho modalidade semipresencial, v. 2)

Conteúdo: v. 2. 7o ano do Ensino Fundamental Anos Finais.

ISBN: 978-85-8312-049-0 (Impresso)

978-85-8312-014-8 (Digital)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Fundamental Anos Finais. 3. Modalidade Semipresencial. I. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. II. Secretaria da Educação. III. Título.

Apostila Regra de Três Resumo, Editora Exato – Disponível em: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi2raaAjcHjAhUxAtQKHRGOD2IQFjAAegQIAxAC&url=http%3A%2F%2Fwww.lyfreitas.com.br%2Fant%2Fpdf%2FRegras%2520de%2520Tres%2520Resumo.pdf&usg=AOvVaw1QP82Lp-4jiVdxznOg6JEC. Acesso em: 29 Jul. 2019.

Matemática : caderno do estudante. São Paulo: Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI): Secretaria da Educação (SEE), 2014.

il. - - (Educação de Jovens e Adultos (EJA) : Mundo do Trabalho modalidade semipresencial, v. 1)

Conteúdo: v. 1. 6o ano do Ensino Fundamental Anos Finais.

ISBN: 978-85-8312-048-3 (Impresso)

978-85-8312-013-1 (Digital)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Fundamental Anos Finais. 3. Modalidade Semipresencial. I. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. II. Secretaria da Educação. III. Título.

Matemática : caderno do estudante. São Paulo: Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI): Secretaria da Educação (SEE), 2014.
il. - - (Educação de Jovens e Adultos (EJA) : Mundo do Trabalho modalidade semipresencial, v. 4)

Conteúdo: v. 4. 9o ano do Ensino Fundamental Anos Finais.
ISBN: 978-85-8312-051-3 (Impresso)
978-85-8312-016-2 (Digital)
1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Fundamental Anos Finais. 3. Modalidade Semipresencial. I. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. II. Secretaria da Educação. III. Título.

Matemática : caderno do estudante. São Paulo: Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI): Secretaria da Educação (SEE), 2015.
il. - - (Educação de Jovens e Adultos (EJA) : Mundo do Trabalho modalidade semipresencial, v. 1)

Conteúdo: v. 1. 1ª série do Ensino Médio.
ISBN: 978-85-8312-120-6 (Impresso)
978-85-8312-098-8 (Digital)
1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Médio. 3. Modalidade Semipresencial. I. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. II. Secretaria da Educação. III. Título.

Matemática : caderno do estudante. São Paulo: Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI): Secretaria da Educação (SEE), 2015.
il. - - (Educação de Jovens e Adultos (EJA) : Mundo do Trabalho modalidade semipresencial, v. 2)

Conteúdo: v. 2. 2ª série do Ensino Médio.
ISBN: 978-85-8312-121-3 (Impresso)
978-85-8312-099-5 (Digital)
1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Médio. 3. Modalidade Semipresencial. I. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. II. Secretaria da Educação. III. Título.

Matemática : caderno do estudante. São Paulo: Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI): Secretaria da Educação (SEE), 2015.
il. - - (Educação de Jovens e Adultos (EJA) : Mundo do Trabalho modalidade semipresencial, v. 3)

Conteúdo: v. 3. 3ª série do Ensino Médio.
ISBN: 978-85-8312-155-8 (Impresso)
978-85-8312-131-2 (Digital)
1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Médio. 3. Modalidade Semipresencial. I. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. II. Secretaria da Educação. III. Título.

Conversão de Unidades – Disponível em: https://matematicabasica.net/unidades-de-medida/. Acesso em: 29 Jul. 2019.


SEE
SECRETARIA DE ESTADO DA
EDUCAÇÃO, CULTURA
E ESPORTES
ACRE